Introduction aux catégories triangulées

M. Anel*

Groupe de travail - Automne 2010

Contents

*CIRGET - UQÀM

Avant-propos Ces notes ont été rédigées pour un groupe de travail sur les catégories triangulées organisé par André Joyal et moi-même au CIRGET à l'automne 2010. Le but en était d'introduire les concepts et définitions principaux pour des personnes travaillant tant en algèbre qu'en géométrie.

N'étant pas spécialistes du domaine, nous nous sommes heurtés dans notre lecture des références à des difficultés diverses dont nous mentionnons les principales :

1. comprendre d'où sortent les définitions des constructions homotopiques (homotopie, cone/cofibre, suspension...) ;
2. comprendre d'où vient la notion de triangle et pourquoi elle est importante ;
3. comprendre d'où sort le signe de la suspension dans la formule de décalage/rotation des triangles ;
4. être certain d'avoir les bons signes dans les formules.

Pour répondre à ces questions, nous avons du retrouver par nous-mêmes certaines connaissances folkloriques chez les spécialistes et nous avons regretté que la littérature ne mette pas plus en avant certains points qui auraient facilité notre étude. Ces notes ne contiennent rien d'original et si elles doivent prétendre à une quelconque originalité, c'est peut-être dans leur articulation autour de nos difficultés et des solutions envisagées. Leur vocation est de faciliter l'accès à la littérature spécialisée.

La première question trouve sa réponse dans une analyse conceptuelle de la situation et dans l'étude préliminaire de la catégorie des complexes et de leurs homotopies avant de faire intervenir les quasi-isomorphismes. Il se trouve que la catégorie des complexes et de leurs homotopies est en fait la catégorie avec équivalences sous-jacente à une 2-catégorie[1] qui possède toutes les pseudo-limites et pseudo-colimites. On en déduit des constructions explicites de toutes les notions homotopiques (cofibre homotopique, suspension...). C'est ce fait, avec l'introduction d'un objet I jouant le rôle d'un intervalle, qui rationalise les définitions de base de la théorie. I est défini comme le complexe des chaines de l'intervalle simplicial $\Delta[1]$. Toutes les constructions homotopiques sur les complexes se définissent à partir de I exactement comme leurs analogues en théorie de l'homotopie des espaces. (Cette comparaison explicite avec la théorie de l'homotopie permet également de "voir" le changement de signe dans la suspension pour la formule de rotation des triangles, App. B).

Ensuite, le fait que la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes à homotopie près tirée d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ soit déjà une catégorie triangulée est important et son utilité va bien au-delà du seul fait de posséder un calcul de fractions pour les quasi-isomorphismes. En effet, la structure triangulée de $K(\mathcal{A})$ est facile de manipulation (et donc de compréhension) grâce aux modèles explicites pour les constructions homotopiques dans $C(\mathcal{A})$. En d'autres termes, l'étude triangulée des complexes à homotopie près est simple car elle se fait sans avoir besoin de dériver (c'est-à-dire sans faire des résolutions).

Enfin, si la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ peut se définir directement comme une localisation de la catégorie $C(\mathcal{A})$ des complexes d'objets de $\mathcal{A}$ par les quasi-isomorphismes, la construction des catégories dérivées par Verdier passe par l'intermédiaire $K(\mathcal{A})$ et ce n'est pas un hasard : la construction des opérations homotopiques de $D(\mathcal{A})$ ne se fait explicitement que par dérivation (c'est-à-dire via des résolutions) des mêmes opérations dans $K(\mathcal{A})$. $K(\mathcal{A})$ est une articulation nécessaire entre $C(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{A})$ et mérite qu'on s'y attarde. [2]

[1] dont les 2-flèches sont les homotopies

[2] Cette articulation se comprend très bien du point de vue de la théorie homotopique des dg-catégories (non-abordée ici) : $C(\mathcal{A})$ vue comme dg-catégorie est l'enrichissement de $C(\mathcal{A})$ par les homotopies de tous degrés et $K(\mathcal{A})$ est la catégorie homotopique associée (définie en remplaçant les complexes de morphismes par leur H_0) ; $D(\mathcal{A})$ est quant à elle la catégorie homotopique de la *dg-localisation* de $C(\mathcal{A})$ par les quasi-isomorphismes (un modèle de laquelle étant la sous dg-catégorie des objets fibrants-cofibrants pour une certaine structure de modèles sur $C(\mathcal{A})$). Ainsi $D(\mathcal{A})$ est construite en dérivant la structure *homotopique* (c'est-à-dire dg-) de $C(\mathcal{A})$.

Pour la deuxième question, la notion de triangle se comprend bien en faisant apparaître la suite des cofibres itérées d'un morphisme de complexes donné f (§4.2). L'intérêt de cette suite est qu'elle fournit presque par définition des suites exactes longues lorsqu'on prend son image par le foncteur $[-,-]$ (classes d'homotopie de morphismes) et c'est l'équivalence de cette suite avec la suite de Puppe qui permet de construire des suites exactes à partir de cette dernière. En outre, c'est aussi cette équivalence qui permet de comprendre d'où sort le signe de la suspension et de répondre à la troisième question.

Les deux suites précédentes sont fonctorielles en le morphisme f avant de travailler à homotopie près, mais elles ne le sont plus après quotient par les homotopies. C'est à cet endroit que se justifie la notion de triangle : le triangle associé à f est la donnée minimale dans la catégorie homotopique sur laquelle l'image de la suite de Puppe est fonctorielle (remarque 4.14).

Enfin, le dernier problème était de comprendre les signes dans les formules de la théorie. Il se résoud en introduisant des noms spécifiques pour les générateurs de I (e_t en dimension 1 et e_0, e_1 en dimension 0) : avec cette base là, il est possible d'écrire $I \otimes A$ sous la forme $e_t \otimes A \oplus e_0 \otimes A \oplus e_1 \otimes A$ (ou en abrégé $e_tA \oplus e_0A \oplus e_1A$) et de décrire "en coordonnées" toutes les constructions issues de I fonctorielles en A (§3). Les signes des cylindres et autres constructions se déduisent alors simplement de la règle de Koszul de commutation pour le produit tensoriel de modules gradués

$$x \otimes y = (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

Notre plan d'étude a finalement été le suivant :

1. rappeler les constructions classiques en théorie de l'homotopie des espaces (qui est le guide indispensable pour une bonne intuition des définitions) §2 ;
2. prendre le temps de donner le détail des constructions homotopiques sur les complexes §3 ;
3. introduire la suite de Puppe sous la forme d'une suite de cofibres itérées et réduire l'image de cette suite dans la catégorie des complexes à homotopie près à la seule donnée d'un *triangle* §4 ;
4. présenter les propriétés des triangles et l'axiomatisation des catégories triangulées §5 ;
5. puis, introduire les quasi-isomorphismes, la localisation associée et les dérivations des constructions précédentes [3].

Nous avons ajouté deux petits appendices, comportant

1. un paragraphe décrivant très succintement la structure abstraite de l'opération de dérivation et donnant des exemples dans d'autres contextes ;
2. et une illustration en dessins du phénomène de changement de signe de la suspension dans la formule de rotation des triangles.

[3] Cette partie n'a pas été rédigée, le livre de Verdier est déjà très clair sur ces constructions [Ve, ch.II.2].

1 Introduction

Un mot sur les références Nous avons trouvé deux très bons textes sur l'histoire des catégories dérivées : l'historique de l'algèbre homologique de Weibel [We], qui place leur construction dans ce contexte très large, et le texte d'Illusie sur les travaux de Verdier [Ill], qui explique les motivations de Grothendieck et de Verdier pour dégager la notion. L'introduction de la thèse de Verdier [Ve] est plus technique et plus concise. On pourra aussi lire le papier de Keller [Ke1] et l'introduction du livre de Kashiwara et Schapira [KS]. Ce dernier livre contient également un texte de Houzel retraçant l'historique de la théorie des faisceaux de Leray aux catégories dérivées.

En guise d'introduction aux définitions, les notes de Noohi [No] sont très bonnes et ont la vertu de bien mettre en évidence la notion de cône (ou cofibre) et ses propriétés mais ne contiennent rien sur les foncteurs dérivés. Les notes de Keller [Ke2] contiennent la définition de Deligne des foncteurs dérivés.

Enfin, la thèse de Verdier [Ve] est, comme souvent, agréable à lire seulement lorsqu'on déjà compris toutes les idées. La partie sur les foncteurs dérivés n'a jamais été pleinement rédigée, mais elle figure dans [Ve0]. Ce dernier texte est historiquement le premier à contenir la définition des catégories triangulées et des foncteurs dérivés, pour l'aborder il vaut mieux avoir déjà en tête la théorie homotopique des complexes.

1.1 Cohomologies et catégories abéliennes

Dans les années 50, Cartan et Eilenberg [CE] unifient différentes théories cohomologiques inventées depuis le début du siècle en une théorie générale des *foncteurs dérivés* : l'image d'une suite exacte courte $M' \to M \to M''$ par un foncteur F peut ne plus être exacte, mais peut se compléter ad hoc en une suite exacte longue, ce sont les termes supplémentaires dans cette suite qui sont appelés les foncteurs dérivés de F.

Exemple 1.1. 1. Soient $Vect$ la catégorie des k-espaces vectoriels et $Rep(G)$ celle des représentations linéaires d'un groupe fini G, le foncteur $Fix : Rep(G) \to Vect$ associant à un G-module le sous-espace des points fixes de l'action transforme les suites exactes $M' \to M \to M''$ en suite $Fix(M') \to Fix(M) \to Fix(M'')$ où la première flèche est toujours un monomorphisme mais où la second peut ne plus être un épimorphisme. (C'est en fait un cas particulier de l'exemple suivant : dans la catégorie des G-modules, si k est la représentation triviale $Fix(M) = \mathrm{Hom}_G(k, M)$.)

2. Si A est un anneau, une suite exacte de A-modules à gauche $M' \to M \to M''$ n'est pas nécessairement préservée par les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ ou $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ pour N un autre A-module. (Pour $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ il suffit de prendre $N = M''$ et pour $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ $N = M$, car le quotient $M \to M''$ n'admet pas en général de section.)

3. Si $A \to B$ est un anneau, les suites exactes de A-modules à gauche $M' \to M \to M''$ ne sont envoyées sur des suites exactes de B-modules par le foncteur $B \otimes_A -$ que si B est plat sur A. (Soit f un élément régulier d'un anneau commutatif A, c'est-à-dire $.f : A \to A$ est injectif, soit $x : A \to k$ un point de A où f s'annule, la suite exacte courte $0 \to A \to A \to A/f \to 0$ est envoyée par $k \otimes_A -$ sur la suite $0 \to k \xrightarrow{0} k = k \to 0$ qui n'est plus exacte à gauche.)

4. L'exemple 2 vaut dans les catégories de modules sous des groupes ou des algèbres de Lie, et même les bimodules sous A.

Dans tous ces cas, le calcul des foncteurs dérivés d'un foncteur F se fait par l'introduction d'un complexe R *résolvant* l'objet M auquel on applique le foncteur F. Il y a deux types de résolutions : à droite et à gauche. Une *résolution à droite* de M est un complexe $R_0 \to R_{-1} \to R_{-2} \to \dots$ dont l'homologie est concentrée en degré 0 et qui est muni d'un morphisme $M \to R_0$ induisant un isomorphisme en homologie (exemples : résolutions injectives, flasques...). Dualement une résolution à gauche de M est un complexe $\cdots \to R_2 \to R_1 \to R_0$ dont l'homologie est concentrée en degré 0 et aui est muni d'un morphisme $R_0 \to M$ induisant un isomorphisme en homologie (exemples : résolutions libres, plates, projective...).

Si R est une résolution de M, le complexe $F(R)$ peut avoir une homologie non triviale : ce sont les valeurs des foncteurs dérivés de F sur M. Si la résolution est à droite on parle de foncteur dérivé à droite, le *i-ème foncteur dérivé à droite de F en M* est définit comme étant $R_iF(R) := H_i(F(R))$. Une telle définition dépend bien sûr du choix de R mais on montre que, pour des résolutions injectives, les foncteurs dérivés obtenus sont isomorphes (il reste alors à montrer que de telles résolutions existent). Si la résolution est à gauche on parle de *foncteur dérivé à gauche* et la définition est similaire (avec la condition d'injectivité remplacée par celle de projectivité).

Exemple 1.2. Dans les exemples précédents on obtient en guise de foncteurs dérivés :

1. la cohomologie $H^i(G, -)$ du groupe G (foncteur dérivé droit) ;
2. les modules $Ext^i_A(-,-)$ (foncteur dérivé droit) ;
3. les modules $Tor^A_i(-,-)$ (foncteur dérivé gauche) ;
4. et les modules $Ext^i_G(-,-)$, $Ext^i_{\mathfrak{g}}(-,-)$ et HH^i_A (cohomologie de Hochschild), tous des foncteurs dérivés droits.

On peut même faire rentrer la cohomologie de de Rham d'une variété X dans ce formalisme en considérant les D_X-modules où D_X est l'anneau non-commutatif des opérateurs différentiels linéaires sur X. Le cadre unifiant de Cartan-Eilenberg est que tous les objets précédents se décrivent comme des modules sur un certain anneau.

À la fin des années 50, pour appliquer les mêmes recettes aux modules sur des espaces annelés et unifier la cohomologie des faisceaux aux exemples précédents, Grothendieck et Heller [Gr, He] inventent le formalisme des catégories abéliennes. Il s'agit d'une axiomatisation des propriétés des catégories de modules sur un anneau qui sont suffisantes pour construire les foncteurs dérivés.

1.2 Catégories dérivées

C'est Grothendieck toujours qui, motivé dans les années 60 par un programme de généralisation de la dualité de Serre aux schémas singuliers, a poussé l'analyse plus loin pour inventer les *catégories dérivées* et unifier les différents foncteurs dérivés R_iF/L_iF en des objets uniques RF/LF, dit les *foncteurs dérivés totaux* (à droite ou à gauche). Le formalisme est fondé sur l'insuffisance pratique des seules résolutions injectives ou projectives et sur l'indépendance du choix de la résolution pour construire les D_iF.

La première idée est de travailler directement avec les objets qu'on manipule en pratique – les complexes – plutôt qu'avec les seuls objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Et la seconde se fonde sur la remarque fondamentale que les foncteurs dérivés doivent préserver les *quasi-isomorphismes*[4] (et non plus simplement les équivalences d'homotopie) entre les résolutions des objets de $\mathcal{A}$ (et par extension entre tous les complexes). Si M et N sont deux complexes quasi-isomorphes, leurs images $F(M)$ et $F(N)$ par un foncteur F peuvent peuvent ne plus être quasi-isomorphes, mais la définition des foncteurs dérivées à l'aide des résolutions prouve que les foncteurs dérivées envoient, eux, quasi-isomorphismes sur quasi-isomorphismes.

Autrement dit, les foncteurs dérivés devraient être définis sans ambiguité si on travaille *à quasi-isomorphisme près* (et non plus seulement à *équivalence d'homotopie* près, comme on le faisait avec les résolutions). D'où l'idée

[4]Un quasi-isomorphisme est un morphisme de complexes induisant un isomorphisme en homologie.

de Grothendieck de considérer la localisation $D(\mathcal{A})$ de la catégorie $C(\mathcal{A})$ des complexes dans $\mathcal{A}$ le long des quasi-isomorphismes : c'est la *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$. Et le foncteur dérivé total d'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre catégories abéliennes doit être un foncteur $DF : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$.

Verdier donnera une description explicite de cette localisation à l'aide d'un calcul de fractions. Comme il l'explique dans son introduction [Ve], la classe des quasi-isomorphismes dans $C(\mathcal{A})$ ne vérifie les axiomes des fractions de Gabriel et Zisman [GZ] qu'à des homotopies de complexes près, d'où son idée de considérer une localisation partielle de $C(\mathcal{A})$ où il identifie les morphismes de complexes homotopes (ce qui revient à inverser la sous-classe des quasi-isomorphismes formée des équivalences d'homotopie), cela crée une catégorie $K(\mathcal{A})$ où la classe des quasi-isomorphismes vérifient les axiomes des fractions.

$D(\mathcal{A})$ n'est plus une catégorie abélienne et sa structure abstraite, dégagée par Verdier, est baptisé *catégorie triangulée*. Il est remarquable que l'intermédiaire technique $K(\mathcal{A})$ soit également une catégorie triangulée. Ce sera la remarque utilisée par Verdier pour donner une autre construction de $D(\mathcal{A})$ comme une sous-catégorie de $K(\mathcal{A})$ via des techniques de localisation spécifiques aux catégories triangulées inspirée des localisations de Serre des catégories abéliennes. [5]

1.3 Foncteurs dérivés

Un foncteur entre catégories abéliennes $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ définit automatiquement un foncteur entre les catégories homotopiques de complexes $K(F) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$, mais ce foncteur n'envoit pas forcément les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes ; autrement dit, il ne définit pas automatiquement un foncteur $D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$. La définition des foncteurs dérivés de F (en fait de $K(F)$) se fait alors en approximant du mieux possible $K(F)$ par des foncteurs qui préservent les quasi-isomorphismes. Il y a deux approximations possibles : à droite $K(F) \to RF$ ou à gauche $LF \to K(F)$, RF et LF sont dits les *foncteurs dérivés droit et gauche de F*.

La propriété de définition de RF est que $K(F) \to RF$ doit être initial pour les morphismes de $K(F)$ vers des foncteurs préservant les quasi-isomorphismes. Plus précisément, composant $K(F)$ avec le morphisme canonique $K(\mathcal{B}) \to D(\mathcal{B})$, on peut toujours le voir à valeur dans $D(\mathcal{B})$; si $G : K(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ est un foncteur préservant les quasi-isomorphismes (c'est-à-dire qu'il se factorise par $D(\mathcal{A})$) alors, pour toute transformation naturelle α : $K(F) \to G$, il existe une unique transformation naturelle $RF \to G : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ telle que α soit le composé $K(F) \to RF \to G$. La définition de LF est duale.

Le calcul explicite des foncteurs dérivés tient dans le fait suivant, reliée à la remarque fondamentale mentionnée plus haut : $D(\mathcal{A})$ est une localisation de $C(\mathcal{A})$, mais il existe des sous-catégories pleines $C^?(A)$ de $C(\mathcal{A})$ dont la localisation par les quasi-isomorphismes est équivalente à $D(\mathcal{A})$ (c'est le cas dès que tout objet de $C(\mathcal{A})$ est quasi-isomorphe à un objet de $C^?(\mathcal{A})$), il suffit donc de travailler avec $C^?(\mathcal{A})$ pour définir les foncteurs dérivés. Par exemple, si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs (et si on ne travaille qu'avec les complexes bornés homologiquement supérieurement), $C^?(\mathcal{A})$ peut être la catégorie des complexes d'objets injectifs. On retrouve ainsi les constructions classiques en les plaçant dans un contexte où elles sont au service de principes généraux.

Les avantages des catégories dérivées pour la définition des foncteurs dérivés sont multiples :

- les différentes foncteurs dérivés de Cartan-Eilenberg $R_iF/L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sont unifiés en un seul objet (le foncteur dérivé dit *total*) $RF/LF : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$;

- des foncteurs non-exacts entre catégories abéliennes se dérivent en des foncteurs exacts[6] entre catégories dérivées ;

[5] Plus tard cette construction sera aussi comprise en termes de localisation de Bousfield de dg-catégories.

[6] C'est-à-dire un foncteur préservant les triangles distingués.

- les compositions de foncteurs dérivées sont mieux gérées ;
- plus généralement, toutes les relations entre foncteurs dérivées jusque-là étudiées par des suites spectrales se simplifient dans les catégories dérivées ;
- et surtout certains adjoints qui n'existaient pas entre catégories abéliennes existent entre les catégories dérivées (c'était la motivation de Grothendieck pour définir généralement la dualité de Serre).

Exemple 1.3. Les différents foncteurs dérivés totaux des foncteurs des exemples précédents sont respectivement :

1. $R\Gamma_{BG}$ sections globales dérivées des faisceaux sur le champ BG (type de cohomologie de BG)
2. Hom dérivé $R\mathrm{Hom}_A(-,-)$
3. produit tensoriel dérivé $-\otimes^{\mathbb{L}}_A -$
4. les modules $R\mathrm{Hom}_G(-,-)$, $R\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,-)$ et $R\mathrm{Hom}_{A\otimes A^o}(-,-)$

1.4 Catégories triangulées

La structure de catégorie triangulée est l'axiomatisation de la structure des catégories dérivées de catégories abéliennes inventé par Verdier et suffisante pour traiter la théorie des foncteurs homologiques, des suites spectrales, etc. [Ve].

Comme l'explique Noohi [No], l'outil essentiel pour définir et comprendre la structure triangulée est la notion de *cône* d'un morphisme de complexes : a un morphisme $f : M \to N$ on associe un complexe $C(f)$ (dit le *cône de* f et qui n'est autre que le complexe total de $f : M \to N$ vu comme un bicomplexe) muni de deux applications $i_f : N \to C(f)$ et $\partial_f : c(f) \to M[1]$ où $M[1]$ est le complexe M dont on a décalé de 1 les indices. Cette donnée est notée

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{c(f)} C(f) \xrightarrow{\partial_f} M[1].$$

Si $f : M \to N$ est un morphisme dans A, on peut penser f comme un morphisme de complexes concentrés en degrés 0, et l'homologie de $C(f)$ est alors égale au quotient N/M en degré 0 et à $\ker(f)$ en degré 1. Dans ce cas, le morphisme ∂_f est essentiellement l'inclusion $\ker(f) \to M$.

En particulier si $M \to N$ est un monomorphisme dans A, $C(f)$ est quasi-isomorphe au quotient N/M. On peut alors penser $C(f)$ en général comme une sorte de quotient qui n'oublierait pas l'information du noyau[7] (l'interprétation est la même si M et N sont des complexes). Pour cette raison, on peut rebaptiser $C(f)$ le *quotient homotopique* (ou le *quotient dérivé*).

Cette construction est l'opération la plus importante sur les complexes, son intérêt tient au fait suivant : tout diagramme $P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow P[1]$ de complexes quasi-isomorphe à un diagramme $M \longrightarrow N \longrightarrow C(f) \longrightarrow M[1]$ fournit une longue suite exacte

$$\cdots \to H_{n+1}(R) \to H_n(P) \to H_n(Q) \to H_n(R) \to H_{n-1}(P) \to \dots$$

Dans une catégorie munie d'une auto-équivalence $S : M \mapsto SM$, on appelle *triangle* tout diagramme

$$M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow SM.$$

Dans $D(\mathcal{A})$ munie de l'auto-équivalence [1] *décalage* ou *suspension*, les triangles images des triangles $M \longrightarrow N \longrightarrow C(f) \longrightarrow M[1]$ sont appelés *triangles distingués*. La définition des catégories triangulées consiste à axiomatiser les propriétés des triangles distingués dans $D(\mathcal{A})$.

[7]Pour une formulation rigoureuse de l'interprétation en terme de quotient, cf [Ve, I.3.1.6].

1.5 Au-delà

Les catégories dérivées sont une technologie adaptée à des problèmes additifs, les technologies équivalentes pour les problèmes non-additifs (la soi-disant cohomologie non-abélienne) sont celles de la théorie de l'homotopie (catégories de modèles de Quillen ainsi que les localisations de Dwyer-Kan et de Bousfield). Ces théories éclaircissent certains éléments de la construction des catégories dérivées (notamment, elles permettent de ne pas avoir à borner les complexes) et amènent à remplacer les catégories triangulées par des dg-catégories stables, mais au prix d'un bagage conceptuel beaucoup plus lourd (la théorie homotopique des dg-catégories).

1.6 Morale : dérivation et catégories de modèles

La morale de cette dérivation (et de toutes les dérivations, §A) se comprend lorsqu'on relit les choses à l'envers. Il faut considérer qu'en fait les objets "naturels" avec lesquels on doit travailler sont les types de quasi-isomorphismes de complexes (objets de $D(\mathcal{A})$ et analogue des types d'homotopie en topologie) et que c'est par "naïveté" que nous n'avions considéré que les objets de A au début (analogue aux ensembles par rapport aux types d'homotopie).

De ce point de vue les foncteurs "naturels" sont ceux entre catégories dérivées $D(\mathcal{A})$ (par exemple les foncteurs Hom qui sont les plus facile à définir). À partir de là, se pose le problème de construire explicitement de tels foncteurs, or les objets de $D(\mathcal{A})$ ne pouvant se définir explicitement qu'à partir des objets de $C(\mathcal{A})$ (considérés eux comme "concrets"), l'explicitation de foncteurs entre catégories dérivées doit nécessairement passer par des foncteurs définis sur les complexes. Mais de même que les objets de $C(\mathcal{A})$ sont des approximations "grossières" des objets de $D(\mathcal{A})$, les foncteurs entre catégories de complexes sont des approximations "grossières" de foncteurs entre catégories dérivées et il faut s'attendre à ce qu'ils se comportent "mal".

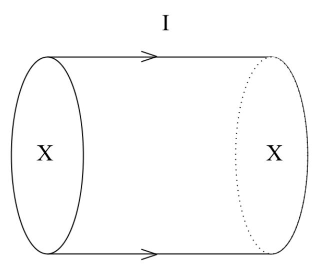
On rêverait bien sûr de définir directement les objets de $D(\mathcal{A})$ et donc comprendre directement les foncteurs entre ces catégories, mais la notion de type de quasi-isomorphisme de complexes (comme celle de type d'homotopie) résiste à une définition algébrique efficace et les seules approches connues sont celles utilisant des *modèles*. En fait, il y a là une sorte d'inversion remarquable d'un point de vue épistémologique : si les notions de types de quasi-isomorphisme ou d'homotopie ne se laissent pas axiomatiser, la théorie qui permet de les décrire à l'aide de modèles possède, elle, une très belle et très puissante axiomatisation sous la forme des *catégories de modèles* de Quillen.

Cette approche "par modèles" a une vertu qu'il faut souligner : il n'y a pas a priori de lien *nécessaire* entre les modèles et les objets modélisés. Les mêmes modèles peuvent être utilisés pour modéliser des objets différents et des mêmes objets peuvent être modélisés par des modèles différents. Ainsi, le choix des modèles avec lesquels travailler n'est qu'une commodité (similaire au choix d'une axiomatisation pour une notion). Cette philosophie s'illustre mieux avec des objets plus sophistiqués que des complexes (comme avec les différents modèles pour les catégories supérieures) mais, dans les complexes, on peut noter que la sous-catégorie des types de quasi-isomorphismes engendrée par des complexes concentrés en degrés 0 et 1 peut aussi se modéliser par la catégorie des groupoïdes dans les groupes abéliens. De manière plus élaborée, on peut aussi choisir de présenter les complexes à l'aide des modèles de l'homotopie stable : la catégorie (supérieure) des complexes est équivalente à la catégorie spectres qui sont des modules sous le spectre $H\mathbb{Z}$...

2 Rappels de théorie de l'homotopie

On note $*$ l'espace topologique ponctuel et I l'intervalle $[0,1]$, les deux extrémités 0 et 1 de I définissent deux morphismes $0,1 : * \to I$. Dans tous les dessins à suivre, nous avons systématiquement orienté I ; garder la trace de cette orientation permet de comprendre comment certains signe peuvent apparaître dans les formules.

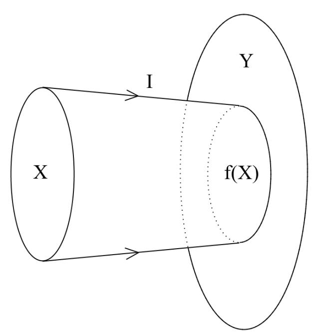
- Le *cylindre* d'un espace topologique X est $I \times X$. On note $e_0 : X \to I \times X$ et $e_1 : X \to I \times X$ les deux copies de X dans $I \times X$ définies par les morphismes 0 et 1 $* \to I$.

  Un morphisme $h : I \times X \to Z$ est une homotopie entre les morphismes $he_0 : X \to Z$ et $he_1 : X \to Z$.

- Si $f : X \to Y$ est une application continue, le *cylindre de f* (*mapping cylinder*), noté $Cyl(f)$, est défini par le pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"'] & I \times X \arrow[d, "e_1"] \\ Y \arrow[r] & Cyl(f) \end{tikzcd}$$

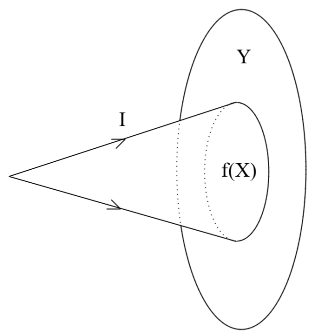
  

  Un morphisme $h : Cyl(f) \to Z$ est équivalent à la donnée

  - d'un morphisme $he_0 : X \to Z$,
  - d'un morphisme $he_1 : Y \to Z$,
  - et d'une homotopie identifiant he_0 et $he_1 f$.

- Si $f : X \to Y$ est une application continue, la *cofibre homotopique de f* (*mapping cone*), noté $Cof(f)$, est définie par le pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & Cyl(f) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & Cof(f) \end{tikzcd}$$

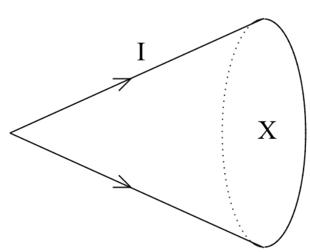


Un morphisme $h : Cof(f) \to Z$ est équivalent à la donnée

  - d'un point x_0 de Z,
  - d'un morphisme $he_1 : Y \to Z$,
  - et d'une contraction de $he_1 f$ sur x_0.

- Pour un espace X, le *cône sur X* est défini comme le mapping cone de id_X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & I \times X \arrow[d] \\ * \arrow[r] & Cone_0(X) \end{tikzcd}$$



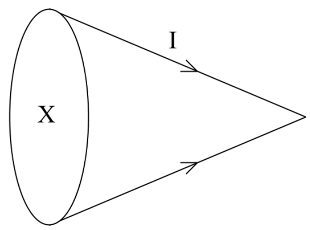
Un morphisme $h : Cone_0(X) \to Z$ est équivalent à la donnée

  - d'un point x_0 de Z,
  - d'un morphisme $he_1 : X \to Z$,

– et d'une contraction de he_1 sur x_0.

Il existe aussi un autre cone, définit avec e_1 :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d] & I \times X \arrow[d] \\ * \arrow[r] & Cone_1(X). \end{tikzcd}$$

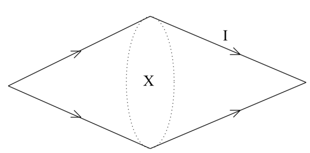


- Pour un espace X, la *suspension de* X est défini par le pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d] & Cone_0(X) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S(X) \end{tikzcd}$$

ou de manière équivalente par le pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & Cone_1(X) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S(X). \end{tikzcd}$$



Un morphisme $S(X) \to Z$ est équivalent à la donnée

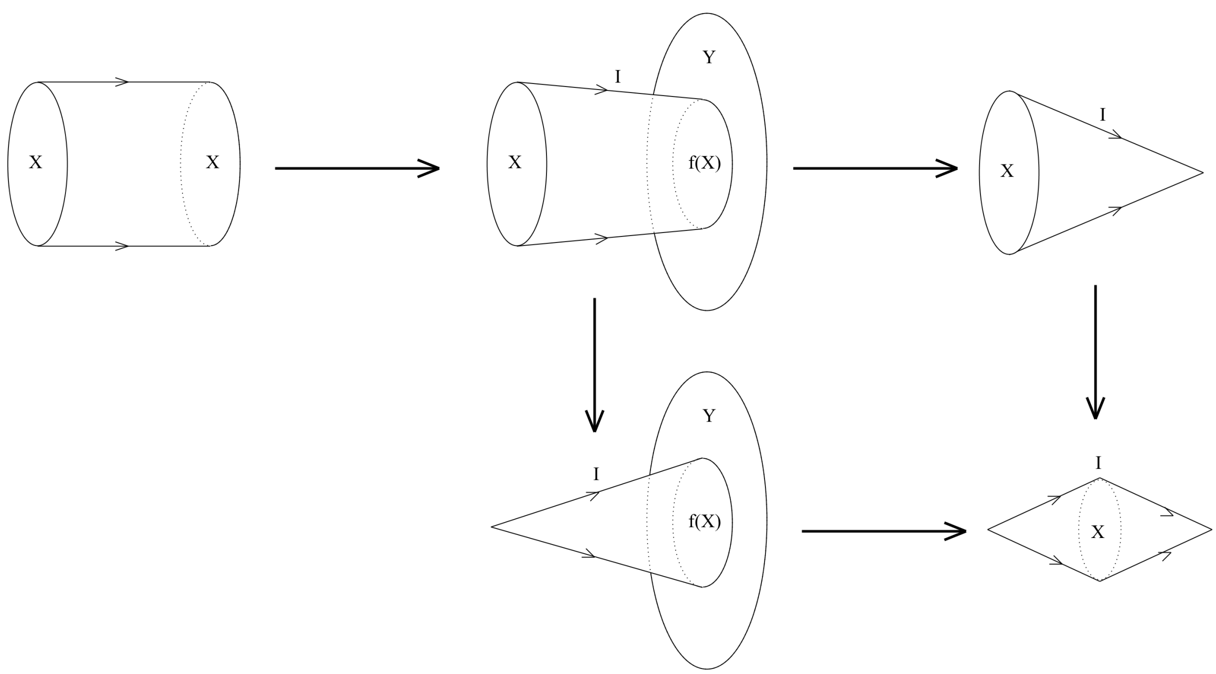
– de deux points x_0 et x_1 de Z,

– et d'une famille de chemins entre x_0 et x_1 paramétrée par X.

- Tous ces objets se regroupent dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & * \arrow[d, "\simeq"] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & I \times X \arrow[r] \arrow[dr] & Cyl(f) \arrow[r] \arrow[d] & Cone_1(X) \arrow[d] \\
* \arrow[rr] & & Cof(f) \arrow[r] & S(X)
\end{tikzcd}$$

où les objets $Cyl(f)$, $Cof(f)$, $Cone_1(X)$ et $S(X)$ sont les colimites des flèches arrivant sur eux. On en déduit en particulier un morphisme canonique de $Cof(f) \longrightarrow S(X)$. Les flèches marquées d'un $\simeq$ sont des équivalences d'homotopie et tous les carrés sont des pushout homotopiques.



- Dans le cadre des espaces pointés, les constructions analogues existent si on remplace $\times$ par le smash product $\wedge$, la seule différence est que les points x_0 et x_1 sont forcément les points marqués et les chemins deviennent des lacets.

Suite de Puppe Toutes ces constructions sont utiles pour construire la suite de Puppe :

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Cof(f) \longrightarrow SX \longrightarrow SY \longrightarrow Cof(Sf) \longrightarrow S^2X \longrightarrow \dots$$

(il est facile de voir que $S(Cof(f)) \simeq Cof(S(f))$).

L'image de cette suite par un foncteur homologique (au sens des axiomes d'Eilenberg-Steenrod) est une suite exacte longue. On peut penser la suite de Puppe comme la structure "géométrique" sous-jacente aux suites exactes longue. Dans le cas des complexes de modules, nous allons voir comment la suite analogue se réduit à la structure axiomatisée sous le nom de *triangle*.

3 Constructions homotopiques en algèbre homologique

3.1 Complexes

Soit k un anneau commutatif fixé, et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne enrichie sur les k-modules. Par exemple, $\mathcal{A}$ peut-être la catégorie k-Mod elle-même ou la catégorie des représentations d'une k-algèbre. Les objets de $\mathcal{A}$ seront appelés des *modules*.

On rappelle la définition de l'action de k-Mod sur $\mathcal{A}$: soient M un k-module et $k^J \to k^I \to M$ une présentation libre de M, pour un objet A de $\mathcal{A}$, on définit $M \otimes A$ comme le conoyau de $A^J \to A^I$.

Définition 3.1.

- Un *k-module gradué* A est la donnée d'une famille $A_n, n \in \mathbb{Z}$ de k-modules. Tous les complexes seront gradués homologiquement, pour passer à la convention cohomologique il suffit de poser $A^n = A_{-n}$.
- Soient $d \in \mathbb{Z}$ et A et B deux modules gradués, un *morphisme gradué de degré d*, noté $f : A \xrightarrow{+d} B$ est une famille de morphismes $f_n : A_n \to B_{n+d}, n \in \mathbb{Z}$.
- On note $G(\mathcal{A})$ la catégorie des k-modules gradués et des morphismes de degré 0.
- Soit A un module gradué, un *élément de A* est un élément de $\oplus_n A_n$. Un élément $x \in A_n$ est dit *homogène de degré n*, si x est un élément homogène son degré est noté $|x|$. Par définition, tout élément se décompose en somme d'éléments homogoènes.

Définition 3.2.

- Un *complexe de k-modules* (A, ∂_A) est la donnée d'un module gradué A et d'un endomorphisme $\partial_A : A \xrightarrow{-1} A$ de degré -1, dit *opérateur de bord*, ou *différentielle*, tel que $\partial_A^2 = 0$. Par abus de notation, un complexe (A, ∂_A) est abrégé par la seule lettre A. Un complexe A sera représenté comme un diagramme

$$\dots \xrightarrow{\partial_A} A_1 \xrightarrow{\partial_A} A_0 \xrightarrow{\partial_A} A_{-1} \xrightarrow{\partial_A} \dots$$

- Soient A et B deux complexes, un *morphisme de complexes*, $f : A \to B$ est un morphisme de modules gradués de degré 0 qui vérifie la relation $\partial_B f = f \partial_A$. On dit que f *commute* avec les opérateurs de bord.
- On note $C(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de k-modules et de leurs morphismes. Le foncteur d'oubli de l'opérateur de bord $C(\mathcal{A}) \to G(\mathcal{A})$ est fidèle et essentiellement surjectif.

Si A est un objet de $\mathcal{A}$, on note simplement A, le module A vu comme un module gradué en degré 0, muni de l'endomorphisme $\partial_A = 0$. Il est facile de voir que cela définit un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{A} \longrightarrow C(\mathcal{A})$.

Homologie et quasi-isomorphismes On définit $B_i(A) := Image(\partial_A : A_{i+1} \to A_i)$ et $Z_i(A) := Noyau(A_i \to A_{i-1})$. Comme $\partial_A^2 = 0$, on a $B_i(A) \subset Z_i(A)$.

Ces objets permettent de définir trois modules gradués :

1. le module des *cycles* d'un complexe A est le module gradué $Z(A)$ tel que $Z(A)_i = Z_i(A)$.
2. le module des *bords* d'un complexe A est le module gradué $B(A)$ tel que $B(A)_i = B_i(A)$.
3. le module d'*homologie* d'un complexe A est le module gradué $H(A)$ tel que $H_i(A) = Z_i(A)/B_i(A)$.

Un morphisme $f : A \to B$ de complexes induit toujours des morphismes $Z(f) : Z(A) \to Z(B)$, $B(f) : B(A) \to B(B)$ et $H(f) : H(A) \to H(B)$. On a donc des foncteurs

$$\begin{array}{rcl} Z : C(\mathcal{A}) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}) \\ B : C(\mathcal{A}) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}) \\ H : C(\mathcal{A}) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}). \end{array}$$

Un morphisme de complexes $f : A \to B$ est dit un *quasi-isomorphisme* si son image par H est un isomorphisme.

Produit tensoriel On note $\otimes$ le produit tensoriel symétrique sur k-Mod, il s'étend en un produit tensoriel symétrique sur la catégorie $C(k)$ des complexes de k-modules où l'isomorphisme de symétrie $s_{AB} : A \otimes B \simeq B \otimes A$ est donné par $s_{AB}(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x)$ pour x et y des éléments homogènes.

L'action de k-Mod sur $\mathcal{A}$ s'étend en une action de $C(k)$ sur $G(\mathcal{A})$ et $C(\mathcal{A})$. Si $M \in G(k)$ et $A \in G(\mathcal{A})$, $M \otimes A$ est défini par

$$(M \otimes A)_n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k \otimes A_{n-k}.$$

Si $M \in C(k)$ et $A \in C(\mathcal{A})$, leur produit tensoriel est le module gradué $M \otimes A$ muni de l'opérateur de bord $\partial_{M \otimes A}$ défini par la formule

$$\partial_{M \otimes A}(x \otimes y) = (\partial_M x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes (\partial_A y),$$

soit en simplifiant la notation sans les produits tensoriels :

$$\partial_{M \otimes A}(xy) = (\partial_M x) y + (-1)^{|x|} x (\partial_A y).$$

Ces constructions sont fonctorielles en M et A : si $f : M \to M'$ et $g : A \to A'$ sont des morphismes de modules gradués (resp. de complexes), ils induisent un morphisme $f \otimes g : M \otimes A \longrightarrow M' \otimes A'$. Si f (resp. g) est l'identité de M (resp de A) on note plutôt $M \otimes g$ (resp $f \otimes A$) le morphisme $f \otimes g$, mais pour alléger les notations, nous noterons ce type de morphismes simplement f (resp. g).

3.2 Intervalle et homotopies

3.2.1 L'intervalle I

est le complexe $ke_t \to ke_0 \oplus ke_1$ dans $C(k)$, engendré librement par e_0 et e_1 en degré 0 et par e_t en degré 1, et muni de la différentielle $\partial e_t = e_1 - e_0$ (c'est le complexe des chaines de l'intervalle).

On note $e_0 : k \to I$ le morphisme envoyant k sur ke_0, $e_1 : k \to I$ le morphisme envoyant k sur ke_1 et $p : I \to k$ le morphisme envoyant e_0 et e_1 sur 1.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[dr, "e_0"] & & \\ & I \arrow[r, "p"] & k \\ k \arrow[ur, "e_1"'] & & \end{tikzcd}$$

e_0, e_1 et p sont des quasi-isomorphismes et e_0 et e_1 sont des retractions de p. e_0 et e_1 sont appelés respectivement les morphismes *source* et *but* de l'intervalle, p est appelé la *projection de I sur k*.

Dans la base (e_t, e_0, e_1), l'opérateur de bord s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -id & 0 & 0 \\ id & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Le cylindre

d'un complexe A est défini comme $I \otimes A$. Il est utile d'écrire $I \otimes A$ sous la forme

$$e_t A \oplus e_0 A \oplus e_1 A$$

avec pour opérateur de bord dans la base (e_t, e_0, e_1)

$$\begin{pmatrix} -\partial_A & 0 & 0 \\ -id_A & \partial_A & 0 \\ id_A & 0 & \partial_A \end{pmatrix}$$

soit, plus explicitement :

$$\begin{aligned} \partial_{I\otimes A}(e_0 x) &= e_0 \partial_A x, \\ \partial_{I\otimes A}(e_1 x) &= e_1 \partial_A x, \\ \partial_{I\otimes A}(e_t x) &= (e_1 - e_0)x - e_t \partial_A x. \end{aligned}$$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "e_0"] & & \\ & I \otimes A \arrow[r, "p"] & A \\ A \arrow[ur, "e_1"'] & & \end{tikzcd}$$

de quasi-isomorphismes et e_0 et e_1 sont des sections de p.

3.2.3 Homotopies

Pour un morphisme $h : I \otimes A \to B$, on définit $h_0 = h \circ e_0$ et $h_1 = h \circ e_1$, appelés respectivement les morphismes *source* et *but* de h. En écrivant $I \otimes A$ sous la forme $e_t A \oplus e_0 A \oplus e_1 A$, h est définie par trois applications $h_0, h_1 : A \to B$ de degré 0 et $h_t : A \to B$ de degré 1

$$h(e_t x + e_0 y + e_1 z) = h_t(x) + h_0(y) + h_1(z)$$

devant vérifier

$$\begin{aligned}
\partial_B(h(e_t x + e_0 y + e_1 z)) &= h(\partial_{I\otimes A}(e_t x + e_0 y + e_1 z)), \\
\partial_B(h_t(x)) + \partial_b(h_0(y)) + \partial_b(h_1(z)) &= h((e_1 - e_0)x - e_t \partial_A x + e_0 \partial_A y + e_1 \partial_A z), \\
&= h_1(x) - h_0(x) - h_t(\partial_A x) + h_0(\partial_A y) + h_1(\partial_A z).
\end{aligned}$$

En séparant les variables on obtient les équations :

$$\begin{aligned}
\partial_B(h_0(y)) &= h_0(\partial_A y), \\
\partial_B(h_1(z)) &= h_1(\partial_A z), \\
\partial_B(h_t(x)) &= h_1(x) - h_0(x) - h_t(\partial_A x),
\end{aligned}$$

dont les deux premières disent que h_0 et h_1 sont des morphismes de complexes.

Un morphisme $I \otimes A \to B$ est donc entièrement déterminé par la donné de deux morphismes de complexes h_0 et h_1 et d'un morphismes h_t de degré 1 devant vérifier

$$\partial_B(h_t(x)) + h_t(\partial_A x) = h_1(x) - h_0(x).$$

Soient deux morphismes de complexes $f, g : A \to B$, une *homotopie de f vers g* est un morphisme $h : I \otimes A \to B$ tel que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. En utilisant la caractérisation de h ci-dessus, une homotopie de f vers g est équivalente à la donnée d'un morphisme $h_t : A \to B$ de degré 1 tel que

$$\partial_B h_t + h_t \partial_A = g - f.$$

3.2.4 Catégorie des complexes à homotopie près - définition

Pour deux complexes A et B dans $C(\mathcal{A})$, on note $\mathrm{Hom}(A, B)$ l'ensemble des morphismes de complexes de A vers B.

On dit que f et g dans $\mathrm{Hom}(A, B)$ sont *homotopes* s'il existe une homotopie de f vers g. C'est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}(A, B)$: elle est clairement reflexive ; elle est symétrique : si h est une homotopie de f vers g, on obtient une homotopie de g vers f en remplaçant h_t par $-h_t$; et elle est aussi transitive : si h est une homotopie de f vers f' et si h' est une homotopie de f' vers f'', $h + h'$ est une homotopie de f vers f''.

On note $[A, B]$ le quotient de $\mathrm{Hom}(A, B)$ obtenu en identifiant deux morphismes homotopes.

Lemme 3.3 (Compatibilité des homotopies à la composition)**.** *Soient A, B et C trois complexes, $f, f' : A \to B$ et $g, g' : B \to C$ quatre morphismes de complexes, α une homotopie de f vers f' et β une homotopie de g vers g', alors il existe une homotopie de gf vers $g'f'$.*

Preuve. De $\partial_B\alpha+\alpha\partial_A = f'-f$ et $\partial_C\beta+\beta\partial_B = g'-g$ on tire $g\partial_B\alpha+g\alpha\partial_A = gf'-gf$ et $\partial_C\beta f'+\beta\partial_B f' = g'f'-gf'$ et

$$g\partial_B\alpha + g\alpha\partial_A + \partial_C\beta f' + \beta\partial_B f' = g'f' - gf$$

Puis, en utilisant que f' et g sont des morphismes de complexes, on a

$$\partial_C(g\alpha + \beta f') + (g\alpha + \beta f')\partial_A = g'f' - gf.$$

□

On déduit du lemme que la composition $\mathrm{Hom}(B,C) \times \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$ des morphismes induit une composition $[B,C]\times[A,B] \longrightarrow [A,C]$. La catégorie ainsi obtenue est appelé la *catégorie des complexes à homotopie près*, elle est noté $K(\mathcal{A})$.

3.2.5 Enrichissement sur les groupoïdes

Soient A et B deux complexes, le graphe $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B)$

$$\mathrm{Hom}(I\otimes A, B) \underset{\xrightarrow{e_0^*}}{\overset{\xrightarrow{e_1^*}}{\xleftarrow{p^*}}} \mathrm{Hom}(A,B)$$

est muni d'une structure de groupoïde.

Soient f et g deux morphismes de A vers B, la fibre de $\mathrm{Hom}(I\otimes A, B) \xrightarrow{e_0^*\times e_1^*} \mathrm{Hom}(A,B)$ en (f,g) est l'ensemble, noté $\mathrm{Hot}(f,g)$, des homotopies de f vers g. Si $f,g,h : A \to B$ sont trois morphismes de complexes, on définit une composition

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hot}(g,h)\times\mathrm{Hot}(f,g) & \longrightarrow & \mathrm{Hot}(f,h) \\ (\beta,\alpha) & \longmapsto & \alpha+\beta. \end{array}$$

En effet, de $\partial_B\alpha + \alpha\partial_A = g - f$ et $\partial_B\beta + \beta\partial_A = h - g$ on tire que

$$\partial_B(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)\partial_A = g - f + h - g = h - f.$$

La relation d'équivalence associée à ce groupoïde est la relation "être homotope", l'ensemble $[A,B]$ des classes d'homotopie de morphismes de A vers B est donc l'ensemble des composantes connexes du groupoïde $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B)$.

La formule trouvé dans la preuve du lemme 3.3 assure que la composition $\mathrm{Hom}(B,C) \times \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$ s'étend en un foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(B,C) \times \underline{\mathrm{Hom}}(A,B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A,C)$. On obtient ainsi une catégorie $\underline{C}(\mathcal{A})$ enrichie sur les groupoïdes, c'est-à-dire en une 2-catégorie.

Cet enrichissement canonique de $C(\mathcal{A})$ en une 2-catégorie est sous-jacent à toutes les constructions homotopiques de la section suivante, qui sont en fait des modèles pour certaines pseudo-colimites dans $\underline{C}(\mathcal{A})$ [Ke, St]. C'est aussi de ce point de vue qu'il faut comprendre le chapitre 3 de la thèse de Verdier [Ve].

3.2.6 Équivalences homotopiques

Deux morphismes de complexes $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont dit *inverses à homotopie près* s'il existe deux homotopies h et h' entre fg et id_A et gf et id_B respectivement.

Un morphisme de complexes $f : A \to B$ est dit une *équivalence d'homotopie* si son image dans $K(C)$ est un isomorphisme. Il revient au même de dire que f admet un inverse à homotopie près. Un tel morphisme est toujours un quasi-isomorphisme.

Lemme 3.4. *Les couples (e_1, p) et (e_0, p) entre $I \otimes A$ et A sont inverses à homotopie près.*

Preuve. Il suffit de faire la preuve pour (e_1, p). Comme $pe_1 = id_A$, il suffit de trouver une homotopie entre e_1p et $id_{I\otimes A}$, c'est-à-dire un morphisme $h_t : I \otimes A \to I \otimes A$ de degré 1 tel $\partial_{I\otimes A} h_t + h_t \partial_{I\otimes A} = e_1p - id$. En utilisant que $I \otimes A = e_tA \oplus e_0A \oplus e_1A$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
p(e_tx + e_0y + e_1z) & = & y + z, \\
e_1p(e_tx + e_0y + e_1z) & = & e_1(y + z), \\
(e_1p - id)(e_tx + e_0y + e_1z) & = & -e_tx + (e_1 - e_0)y.
\end{array}
$$

Le morphisme h_t est déterminé par une application $e_0A \oplus e_1A \to e_tA$, on note $e_t\alpha_0(x)$ et $e_t\alpha_1(y)$ les images de e_0x et e_1y respectivement. On cherche les conditions sur α_0 et α_1.

$$
\begin{array}{rcl}
(\partial_{I\otimes A} h_t + h_t \partial_{I\otimes A})(e_tx + e_0y + e_1z)) & = & \partial_{I\otimes A}(e_t(\alpha_0(y) + \alpha_1(z))) + h_t((e_1 - e_0)x + e_0\partial_Ay + e_1\partial_Az) \\
& = & (e_1 - e_0)(\alpha_0(y) + \alpha_1(z)) + e_t(\alpha_1(x) - \alpha_0(x))
\end{array}
$$

où dans la dernière équation on a utilisé le fait que α_0 et α_1 sont des morphismes de complexes. La condition

$$(\partial_{I\otimes A} h_t + h_t \partial_{I\otimes A}) = e_1p - id$$

donne donc les conditions suivantes sur α_0 et α_1 :

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_0(y) + \alpha_1(z) & = & y \\
\alpha_0(x) - \alpha_1(x) & = & x
\end{array}
$$

Il suffit prendre $\alpha_0(y) = y$ et $\alpha_1(z) = 0$. □

Corollaire 3.5. *Les objets $I \otimes A$ et A sont isomorphes dans $K(C)$.*

3.2.7 Disques et sphères

La *sphère de dimension n*, noté S^n est le complexe de k-modules $k\sigma_n$ engendré par un générateur σ_n en degré n et dont la différentielle est nulle. Ce complexe est parfois noté $k[n]$, mais nous préférons utiliser une notation faisant appel à l'intuition topologique.

Le *disque de dimension n*, noté D^n est le complexe de k-modules $k\sigma_n \oplus k\sigma_{n-1}$ engendré par un générateur σ_n en degré n et un générateur σ_{n-1} en degré $n-1$ et dont la différentielle est donnée par la formule $\partial_{D^n}\sigma_n = \sigma_{n-1}$. En particulier, $H(D^n)$ est le module gradué nul.

Il existe deux morphismes de complexes évidents $S^{n-1} \xrightarrow{b} D^n \xrightarrow{q} S^n$. De plus, le carré suivant est commutatif et cocartésien dans $C(k\text{-}Mod)$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D^n \arrow[d, "q"] \\ 0 \arrow[r] & S^n. \end{tikzcd}$$

Lemme 3.6. *Pour A un complexe de k-modules, le foncteur $A \mapsto A_n$ est représentable par D^n et le foncteur $A \mapsto Z_n(A)$ est représentable par S^n. De plus, le morphisme $D^n \to S^n$ induit l'inclusion $Z_n(A) \subset A_n$ et le morphisme $S^{n-1} \to D^n$ induit l'application de bord $\partial_A : A_n \to Z_{n-1}A$.*

Un morphisme de $I \otimes D^n \longrightarrow A$ est la donné de deux éléments $a, b \in A_n$ et d'un élément de $c \in A_{n+1}$ tels que $\partial_A c = b - a$.

Lemme 3.7. $[S^n, A] = H_n(A)$

Preuve. Par définition, $[S^n, A]$ est le quotient de l'application $\mathrm{Hom}(I \otimes S^n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^n, A)$ définit par $e_1^* - e_0^*$. Un morphisme $I \otimes S^n \to A$ est la donnée de deux cycles $x, y \in Z_n A$ et d'un élément $z \in A_{n+1}$ tel que $\partial_A z = y - x$, deux éléments $x, y \in Z_n A = \mathrm{Hom}(S^n, A)$ sont donc homotopes si et seulement s'il existe un élément $z \in A_{n+1}$ tel que $\partial_A z = y - x$, autrement dit si et seulement s'ils sont homologues. □

Remarque 3.8. Ce lemme permet de faire des analogues bien connus entre la théorie homologique des complexes et théorie homotopique des espaces pointés : l'homologie d'un complexe apparaît comme l'exact analogue de l'homotopie d'un espace ; les quasi-isomorphismes sont les analogues des équivalences faibles d'homotopie et les équivalence d'homotopie de complexes sont les analogues des équivalences d'homotopie des espaces.

3.3 Constructions homotopiques

Pour des dessins illustrant les différentes constructions homotopiques, on se reportera à la section 2 et à l'appendice B.

3.3.1 Cylindre d'un morphisme

Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes, le cylindre de f, notée $Cyl(f)$ est défini par le carré cocartésien (push-out)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_1"'] & B \arrow[d, "e_1"] \\ I \otimes A \arrow[r] & Cyl(f) \end{tikzcd}$$

Le morphisme $B \to Cyl(f)$, encore noté e_1, est appelé le *morphisme but du cylindre*. Le morphisme source $e_0 : A \to I \otimes A$ induit un morphisme $A \to Cyl(f)$ encore noté e_0, appelé le *morphisme source du cylindre*.

Remarque : le cylindre de id_A est $I \otimes A$.

Il est utile d'écrire $Cyl(f)$ sous la forme

$$e_t A \oplus e_0 A \oplus e_1 B$$

avec pour opérateur de bord dans la base (e_t, e_0, e_1)

$$\begin{pmatrix} -\partial_A & 0 & 0 \\ -id_A & \partial_A & 0 \\ f & 0 & \partial_B \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.9. *Le morphisme but $e_1 : B \to Cyl(f)$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. La preuve est la même que dans le cas du cylindre d'un objet.

$$(e_1 p - id)(e_t x + e_0 y + e_1 z) \quad = \quad -e_t x + e_1 f(y) - e_0 y.$$

En utilisant que $Cyl(f) = e_t A \oplus e_0 A \oplus e_1 B$, et le même raisonnement qu'au lemme 3.4, l'homotopie h_t entre $e_1 p$ et $id_{I\otimes A}$ est donnée par le morphisme

$$\begin{array}{rcl} h_t : e_0 A \oplus e_1 B & \longrightarrow & e_t A \\ e_0 y + e_1 z & \longmapsto & e_t y. \end{array}$$

□

Lemme 3.10 (Propriété universelle du cylindre)**.** *Soient $f : A \to B$ un morphisme de complexes et C un complexe, un morphisme $g : Cyl(f) \to C$ est équivalent à la donnée*

- *d'un morphisme de complexes $g_1 : B \to C$*
- *d'un morphisme de complexes $g_0 : A \to C$*
- *d'un morphisme gradué $g_t : A \to C$ de degré 1*

tels que

- $g_1 = g e_1$,
- $g_0 = g e_0$
- *et $\partial_C g_t + g_t \partial_A = g_1 f - g_0$ (g_t définit une homotopie de g_0 vers $g_1 f$).*

Preuve. g_1, g_0 et g_t définissent un morphisme gradué $g : Cyl(f) \to C$ tel que $g_1 = g e_1$ et $g_0 = g e_0$ dont il faut comprendre la condition de commutation aux opérateurs de bord. En termes matriciels :

$$\begin{array}{rcl} 0 = g\partial_{Cyl(f)} - \partial_C g & = & \begin{pmatrix} g_t & g_0 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_A & 0 & 0 \\ -id_A & \partial_A & 0 \\ f & 0 & \partial_B \end{pmatrix} - (\partial_C) \begin{pmatrix} g_t & g_0 & g_1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -g_t\partial_A - g_0 + g_1 f & g_0\partial_A & g_1\partial_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_C g_t & \partial_C g_0 & \partial_C g_1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -g_t\partial_A - g_0 + g_1 f - d_C g_t & g_0\partial_A - \partial_C g_0 & g_1\partial_A - \partial_C g_1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

En regroupant les composantes on obtient le système :

$$\begin{array}{rcl} \partial_C g_0 - g_0\partial_A & = & 0, \\ \partial_C g_1 - g_1\partial_A & = & 0, \\ d_C g_t - g_t\partial_A & = & g_1 f - g_0. \end{array}$$

Les deux premières équations disent que g_0 et g_1 sont des morphismes de complexes et la troisième que g_t est la relation d'homotopie cherchée. □

3.3.2 Cofibre homotopique

Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes, la *cofibre homotopique* (ou *le quotient homotopique*, ou *le mapping cone*) de f, notée $Cof(f)$ est défini par le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & Cyl(f) \arrow[d, "q"] \\ 0 \arrow[r] & Cof(f) \end{tikzcd}$$

En utilisant l'écriture $Cyl(f) = e_t A \oplus e_0 A \oplus e_1 B$, on déduit que $Cof(f)$ se décrit sous la forme

$$e_t A \oplus e_1 B$$

avec pour opérateur de bord dans la base (e_t, e_1)

$$\begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ f & \partial_B \end{pmatrix}.$$

On note encore $e_1 : B \to Cof(f)$ le morphisme composé $B \to Cyl(f) \to Cof(f)$.

Lemme 3.11 (Propriété universelle de la cofibre homotopique)**.** *Soient $f : A \to B$ un morphisme de complexe et C un complexe, un morphisme $g : Cof(f) \to C$ est équivalent à la donnée*

- *d'un morphisme de complexes $g_1 : B \to C$,*
- *et d'un morphisme gradué $g_t : A \to C$ de degré 1*

tels que

- $g_1 = ge_1$
- *et $\partial_C g_t + g_t \partial_A = g_1 f$ (g_t définit une homotopie de 0 vers $g_1 f$).*

Preuve. Immédiat par le lemme 3.10. □

Corollaire 3.12 (Exactitude homotopique de la cofibre)**.** *Soient $f : A \to B \in C(\mathcal{A})$ et $C \in C(\mathcal{A})$, la suite de morphismes dans k-Mod*

$$[Cof(f), C] \longrightarrow [B, C] \longrightarrow [A, C]$$

est exacte en $[B, C]$.

Preuve. Immédiat par le lemme 3.11. □

3.3.3 Le cône

d'un complexe A est défini comme la cofibre homotopique de id_A et notée $Cone(A)$.

En utilisant l'écriture $Cof(f) = e_t A \oplus e_1 B$, on déduit que $Cone(A)$ se décrit sous la forme

$$e_t A \oplus e_1 A$$

avec pour opérateur de bord dans la base (e_t, e_1)

$$\begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ id_A & \partial_A \end{pmatrix}.$$

Par définition, il existe un morphisme $e'_1 : A \to Cone(A)$.
Le lemme 3.11 se spécialise.

Lemme 3.13 (Propriété universelle du cône)**.** *Soient A et C des complexes, un morphisme $g : Cone(A) \to C$ est équivalent à la donnée*

- *d'un morphisme de complexes $g_1 : A \to C$,*
- *et d'un morphisme gradué $g_t : A \to C$ de degré 1*

tels que

- $g_1 = ge_1$
- *et $\partial_C g_t + g_t \partial_A = g_1 f$ (g_t définit une homotopie de 0 vers $g_1 f$).*

Lemme 3.14 (Contractibilité du cône)**.** *Soit 0 le complexe nul, le morphisme $Cone(A) \longrightarrow 0$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. Il suffit de trouver une homotopie entre $Id_{cone(A)}$ et 0...

□

3.3.4 La suspension

d'un complexe A est définie comme la cofibre de $e'_1 : A \to cone(A)$ et notée $S(A)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & Cone(A) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & S(A). \end{tikzcd}$$

En utilisant l'écriture $Cone(A) = e_t A \oplus e_1 A$, on déduit que $S(A)$ se décrit sous la forme

$$e_t A$$

avec pour opérateur de bord $-\partial_A$.

Une autre description de la suspension de A est la suivante. Soit $k[1]$ le module k en degré 1, alors $S(A) = k[1] \otimes A$. Ceci explique qu'on note aussi $A[1]$ la suspension de A. (Attention, avec des indices cohomologiques, la suspension est toujours notée [1] mais $k[1]$ est défini en mettant k en degré -1.)

Lemme 3.15 (Propriété universelle de la suspension)**.** *Soient A et C des complexes, un morphisme $g : S(A) \to C$ est équivalent à la donnée d'un morphisme $g_t : A \to C$ de degré 1 tel que $\partial_C g_t + g_t \partial_A = 0$, c'est-à-dire que g_t définit un morphisme de complexes de degré 1, ou encore une homotopie de $0 : A \to C$ vers $0 : A \to C$ (une famille de lacets dans C, paramétrés par A).*

Preuve. Immédiat par le lemme 3.11. $\square$

Définition 3.16. Soient A et B deux complexes, un morphisme de complexes de degré 1 de A vers B, noté $f : A \xrightarrow{+1} B$ est un morphisme de complexe $f : S(A) \to B$.

On itère facilement la définition...

3.3.5 Le pushout homotopique

Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux morphismes de complexes, le *pushout homotopique de f et g*, noté $B \cup_A^h C$ est défini comme la colimite du diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_0"'] & B \arrow[d, dashed] \\ A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "g"'] & I \otimes A \arrow[dr, dashed] & \\ C \arrow[rr, dashed] & & C \cup_A^h B \end{tikzcd}$$

Toutes les notions précédentes sont des cas particuliers de pushout homotopique :

1. si $g = Id_A$, $A \cup_A^h B$ est le cylindre de f ;
2. si $g = A \to 0$, $0 \cup_A^h B$ est la cofibre homotopique de f ;
3. si $g = A \to 0$ et $f = Id_A$, $0 \cup_A^h A$ est le cône de A (on obtient l'autre cône en inversant les rôle de f et g) ;
4. si $f = g = A \to 0$, $0 \cup_A^h 0$ est la suspension de A.

3.4 Les constructions duales

3.4.1 Complexe des morphismes et intervalle dual

Avant de définir les constructions duales des constructions précédentes, il faut fixer une convention

Soient A et B deux modules gradué dans $G(\mathcal{A})$, on définit un module gradué de k-modules $\mathrm{HOM}(A, B)$ en posant

$$\mathrm{HOM}(A, B)_n = \prod_k \mathrm{Hom}(A_k, B_{k+n})$$

c'est-à-dire que les objets de $\mathrm{HOM}(A, B)_n$ sont les morphismes gradués de degré n.

Si A et B sont des complexes, on muni $\mathrm{HOM}(A, B)$ d'un opérateur de bord $\partial_{\mathrm{HOM}(A,B)}$ définit par

$$(\partial_{\mathrm{HOM}(A,B)} f)(x) = \partial_B(f(x)) - (-1)^{|f|} f(\partial_A x).$$

Le complexe I^* est défini comme $\mathrm{HOM}(I,k)$ dans $C(k)$, il est engendré par e^0 et e^1 en degré 0 et e^t en degré -1, qui forment la base duale de (e_0, e_1, e_t). La différentielle ∂_{I^*} est définie par :

$$\begin{aligned}
\partial_{I^*} e^0(e_t x + e_0 y + e_1 z) &= 0 - e^0(\partial_I(e_t x + e_0 y + e_1 z)) \\
&= -e^0((e_1 - e_0)x) \\
&= x,
\end{aligned}$$

soit $\partial_{I^*} e^0 = e^t$. On trouve de même $\partial_{I^*} e^1 = -e^t$ et $\partial_{I^*} e^t = 0$.

Dans la base (e^0, e^1, e^t), ∂_{I^*} est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ id & -id & 0 \end{pmatrix}.$$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & k . \\
k \arrow[r, "p^*"] & I^* \arrow[ur, "e^1"] \arrow[dr, "e^0"'] & \\
 & & k
\end{tikzcd}$$

Les morphismes e^0 et e^1 sont appelés respectivement les morphismes *source* et *but* de I^*. Par dualité, les paires (e^0, p^*) et (e^1, p^*) sont encore des équivalences homotopiques.

3.4.2 Espace de chemins

Lemme 3.17. *Pour tout $A \in C(\mathcal{A})$, $HOM(I,A)$ est isomorphe à $I^* \otimes A$.*

Preuve. L'isomorphisme $I^* \otimes A \longrightarrow \mathrm{HOM}(I,A)$ est donné par

$$\phi \otimes y \longmapsto (x \mapsto (-1)^{|x||y|}\phi(x)y).$$

□

Dans la suite, il est plus facile de travailler avec $I^* \otimes A$ au lieu de $\mathrm{HOM}(I,A)$ (la différentielle s'écrit plus facilement).

$I^* \otimes A$ est *l'espace des chemins dans A*, il s'écrit $e^0 A \oplus e^1 A \oplus e^t A$ muni de la différentielle $\partial_{I^*} \otimes A + I^* \otimes \partial_A$:

$$\begin{pmatrix} \partial_A & 0 & 0 \\ 0 & \partial_A & 0 \\ id_A & -id_A & -\partial_A \end{pmatrix}.$$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & & A \, . \\ A \arrow[r, "p^*"] & I^* \otimes A \arrow[ur, "e^1"] \arrow[dr, "e^0"'] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Les morphismes e^0 et e^1 sont appelés respectivement les morphismes *source* et *but* de $I^* \otimes A$. Les paires (e^0, p^*) et (e^1, p^*) sont encore des équivalences homotopiques.

On vérifie qu'un morphisme $A \to I^* \otimes B$ est bien la donnée d'une homotopie : en écrivant $I^* \otimes B = e^0 B \oplus e^1 B \oplus e^t B$, un tel morphisme est la données de trois morphismes $\alpha : A \to e^t B$ de degré 1, et $h_0 : A \to e^0 B$, $h_1 : A \to e^1 B$ de degré 0 tels que

$$\begin{pmatrix} \partial_B & 0 & 0 \\ 0 & \partial_B & 0 \\ id_B & -id_B & -\partial_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_B h_0 \\ \partial_B h_1 \\ h_0 - h_1 - \partial_B \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \partial_A \\ h_1 \partial_A \\ \alpha \partial_A \end{pmatrix}$$

Ces conditions disent que h_0 et h_1 sont des morphismes de complexes et que α est une homotopie de h_1 vers h_0 (le sens est inversé par rapport à la notion classique).

3.4.3 Espace de chemins d'une application

Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes, on définit *l'espace des chemins de f* (*mapping path space*], noté $Map(f)$ par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} Map(f) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ I^* \otimes B \arrow[r, "e_1^*"'] & B \end{tikzcd}$$

En utilisant la base (e^0, e^1, e^t), $Map(f)$ se décrit comme le module gradué $e^0 B \oplus e^1 A \oplus e^t B$ muni de la différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial_B & 0 & 0 \\ 0 & \partial_A & 0 \\ -id_B & f & -\partial_B \end{pmatrix}.$$

Remarque : l'espace des chemins de id_A est $I^* \otimes A$.

3.4.4 Fibre homotopique

Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes, on définit la *fibre homotopique de f* (*mapping cocone*), notée $Fib(f)$ par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} Fib(f) \arrow[r] \arrow[d] & Map(f) \arrow[d, "e^0"] \\ 0 \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

En utilisant la base (e^0, e^1, e^t), $Fib(f)$ se décrit comme le module gradué $e^1A \oplus e^tB$ muni de la différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial_A & 0 \\ f & -\partial_B \end{pmatrix}.$$

3.4.5 Le cocône

Le cocône de A, noté $cocone(A)$, est défini comme la fibre de l'espace des chemins de A, $I^* \otimes A$:

$$\begin{tikzcd} cocone(A) \arrow[r] \arrow[d] & I^* \otimes A \arrow[d, "d_0^*"] \\ 0 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

En utilisant la base (e^0, e^1, e^t), $cocone(f)$ se décrit comme le module gradué $e^1A \oplus e^tA$ muni de la différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial_A & 0 \\ id_A & -\partial_A \end{pmatrix}.$$

3.4.6 Complexe des lacets

Le complexe des lacets de A, noté ΩA, est défini comme la fibre du cocone de A :

$$\begin{tikzcd} \Omega A \arrow[r] \arrow[d] & cocone(A) \arrow[d, "e^1"] \\ 0 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

En utilisant la base (e^1, e^t), $\Omega(A)$ se décrit comme le module gradué e^tA muni de la différentielle $-\partial_A$. En notant $A[n] := k[1]^{\otimes n} \otimes A$, on a $\Omega A = A[-1]$.

Le foncteur 'complexe des lacets' est inverse du foncteur 'suspension', on le notera donc aussi S^{-1}.

3.4.7 Produits fibrés homotopiques

Soient $f : B \to A$ et $g : C \to A$ deux morphismes de complexes, on définit le produit fibré homotopique de f et g, noté $C \times^h_A B$ comme la limite du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \times^h_A B \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & B \arrow[d, "f"] \\ & A^I \arrow[r, "e^1"] \arrow[d, "e^0"'] & A \\ C \arrow[r, "g"] & A. & \end{tikzcd}$$

Toutes les constructions précédentes sont des cas particuliers de produit fibré homotopique :

1. si $g = Id_A$, $A \times_A^h B$ est le mapping space de f ;
2. si $g = 0 \to A$, $0 \times_A^h B$ est la fibre homotopique de f ;
3. si $g = 0 \to A$ et $f = Id_A$, $0 \cup_A^h A$ est le cocône de A ;
4. si $f = g = 0 \to A$, $0 \times_A^h 0$ est le complexe des lacets de A.

3.5 Morale

La catégorie des complexes $C(\mathcal{A})$ s'enrichit naturellement en une 2-catégorie dont la 1-troncation est la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes à homotopie près et les constructions homotopiques sont "naturelles" au sens ou ce sont des constructions de pseudo-(co)limites dans une 2-catégorie. Dans la suite, la notion de catégorie triangulée axiomatise les propriétés de $K(\mathcal{A})$.

4 Des suites longues aux triangles

Rappel et notation Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $C(\mathcal{A})$, on lui associe le diagramme suivant, appelé *le triangle distingué de* f :

$$\Delta_f = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{e_1} Cof(f) \xrightarrow{\pi_1} SA$$

où $e_1 : B \to Cof(f)$ est l'inclusion canonique et $Cof(f) \to SA$ est l'application quotient par l'image de e_1 (il est noté π_1 car en écrivant $Cof(f) = e_t A \oplus e_1 B$ il correspond à la première projection). Dans la suite, il sera utile de noter $c(f)$ le morphisme $e_1 : B \to Cof(f)$ et ∂_f le morphisme $\pi_1 : Cof(f) \to SA$.

4.1 La catégorie des morphismes de complexes

Définition 4.1. Un *carré commutatif à homotopie près* (en abrégé un *carré homotopique*) est la donnée d'un carré de complexes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

et d'une homotopie α de $f'g'$ vers gf, c'est-à-dire d'un morphisme gradué de degré 1 $\alpha : A \xrightarrow{+1} D$ tel que

$$\partial_D \alpha + \alpha \partial_A = gf - f'g'.$$

une telle donnée est dessinée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D. \end{tikzcd}$$

Lemme 4.2. *Un carré homotopique définit un carré commutatif dans $K(\mathcal{A})$ et réciproquement, tout carré commutatif dans $K(\mathcal{A})$ est l'image d'un carré homotopique de $C(\mathcal{A})$.*

Preuve. Évident. $\square$

Définition 4.3. Pour un ordinal λ, on définit la catégorie $C(\mathcal{A})_h^\lambda$ dont les objets sont les diagrammes $\lambda \to C(\mathcal{A})$ et dont les morphismes sont les diagrammes de carrés homotopiques

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Longrightarrow}"] & C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\gamma}{\Longrightarrow}"] & D \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta}{\Longrightarrow}"] & E \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$C(\mathcal{A})_h^\lambda$ est appelée la *catégorie des λ-diagrammes à homotopie près.* Ces catégories sont étudiées plus en détail dans [Ve] notamment leur structure de 2-catégorie, mais nous ne nous en servirons ici que pour mentionner les propriétés de fonctorialité de la suite des cofibres itérées.

L'image d'un tel diagramme dans $K(\mathcal{A})$ est un diagramme commutatif, mais le choix des homotopies est une structure supplémentaire qui ne peut pas se voir dans $K(\mathcal{A})$.

4.2 Suite des cofibres itérées

Soit $f : A \to B$ dans $C(\mathcal{A})$, on rappelle que la cofibre homotopique de f, notée $Cof(f)$, s'inscrit dans un diagramme

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{e_1} Cof(f)$$

où $e_1 : B \to Cof(f)$ est l'inclusion canonique. Dans la suite, il sera utilise de noter $c(f)$ le morphisme $e_1 : B \to Cof(f)$.

Définition 4.4. La suite de cofibres itérées de $f : A \to B$ est la suite de morphismes

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{c^2(f)} Cof(c(f)) \xrightarrow{c^3(f)} Cof(c^2(f)) \xrightarrow{c^4(f)} Cof(c^3(f)) \longrightarrow \dots$$

où chaque morphisme est la cofibre homotopique du précédent.

On définit les ordinaux suivants : $\underline{2} = \{0 < 1\}$, $\underline{3} = \{0 < 1 < 2\}$ et ω l'ordinal dénombrable.

Lemme 4.5. *Les suites de cofibres itérées sont des foncteurs $C(\mathcal{A})_h^{\underline{2}} \longrightarrow C(\mathcal{A})_h^\omega$.*

Preuve. Il suffit de montrer que la suite de cofibre $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f)$ définit un foncteur $C(\mathcal{A})_h^{\underline{2}} \longrightarrow C(\mathcal{A})_h^{\underline{3}}$. Soit un carré homotopique

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[d, "v"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B'
\end{tikzcd},$$

en utilisant les notations $Cof(f) = e_t A \oplus e_1 B$ et $Cof(f') = e_t A' \oplus e_1 B'$, on définit un morphisme $w : Cof(f) \longrightarrow Cof(f')$ par

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ \alpha & v \end{pmatrix}$$

qui rend le carré

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, "u"'] & Cof(f) \arrow[d, "w"] \\ B' \arrow[r, "c(f')"'] & Cof(f') \end{tikzcd}$$

commutatif dans $C(\mathcal{A})$. De plus, si u et v sont des équivalences d'homotopie, il en est de même de w. $\square$

Pour deux complexes A et B, on rappelle que $[A, B]$ désigne le k-module des classes d'homotopie de morphismes de complexes de A vers B.

Lemme 4.6. *Soient $f : A \to B \in C(\mathcal{A})$ et $C \in C(\mathcal{A})$, la suite de k-modules*

$$[A,C] \xleftarrow{f^*} [B,C] \xleftarrow{c(f)^*} [Cof(f),C] \xleftarrow{c^2(f)^*} [Cof(c(f)),C] \xleftarrow{c^3(f)^*} [Cof(c^2(f)),C] \xleftarrow{c^4(f)^*} [Cof(c^3(f)),C] \longleftarrow \ldots$$

est exacte en tous ses termes sauf $[A, C]$.

Preuve. C'est le corollaire 3.12 de ces notes. $\square$

Il faut remarquer que cette suite ne dépend en fait que de l'image de la suite de cofibres itérées dans $K(\mathcal{A})$.

Remarque 4.7. Dualement, il existe la suite des fibres itérés, qui est transformée en suite exacte par un foncteur du type $[C, -]$.

Des suites aux triangles Le but de cette section est d'expliquer qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[r, "c^4(f)"] \arrow[d, "r_{c(f)}"] & Cof(c^3(f)) \arrow[r, "c^5(f)"] \arrow[d, "r_{c^2(f)}"] & Cof(c^4(f)) \arrow[r] \arrow[d, "r_{c^3(f)}"] & \cdots \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c(f)"] & Cof(f) \arrow[r, "\partial_f"] & SA \arrow[r, "-Sf"] & SB \arrow[r, "-Sc(f)"] & SCof(f) \arrow[r, "-S\partial_f"] & S^2A \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

où les carrés commutent à homotopie près et où tous les morphismes verticaux sont des équivalences d'homotopie construit fonctoriellement en f. On voit ainsi que toute l'information de la suite longue est contenue[8] dans le diagramme

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA$$

puisque le reste de la suite ne consiste, à des changements de signes prés, qu'en des suspensions de ce diagramme. C'est ce type de diagramme qu'on appelle un *triangle distingué*.

L'objet gradué sous-jacent à $Cof(c(f))$ est $e'_tB \oplus e'_1(e_tA \oplus e_1B)$ et celui de SA est e_tA, on note r_f le morphisme gradué de degré 0 $Cof(c(f)) \longrightarrow SA$ consistant en la projection sur le facteur A. La différentielle de $Cof(c(f))$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -\partial_B & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_A & 0 \\ id_B & f & \partial_B \end{pmatrix},$$

r_f est un morphisme de complexes.

[8]Remarque 4.14.

Lemme 4.8. *Soit $f : A \to B$ un morphisme de complexes, alors*

1. *r_f est une équivalence d'homotopie admettant un unique inverse $s_f : SA \longrightarrow Cof(c(f))$ tel que $r_f s_f = id_{SA}$,*
2. *$r_f c^2(f) = \partial_f$*

Preuve. 1. Le morphisne gradué de degré 0 sous-jacent à s_f est définit par un morphisme $a : e_t A \to e_1' e_t A$ et un morphisme $b : e_t A \to e_t' B$, l'hypothèse $r_f s_f = id_{SA}$ implique que $a = id_A$. La matrice de s_f est donc

$$\begin{pmatrix} b \\ id_A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La commutation de de s_f avec les opérateurs de bord donne le système

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -\partial_B & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_A & 0 \\ id_B & f & \partial_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ id_A \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ id_A \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\partial_A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \partial_B b \\ -\partial_A \\ b+f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b\partial_A \\ -\partial_A \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

duquel on tire que

$$s_f = \begin{pmatrix} -f \\ id_A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une homotopie de $s_f r_f$ vers $id_{cof(c(f))}$

$$id_{cof(c(f))} - s_f r_f = \begin{pmatrix} id_B & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_B \end{pmatrix}$$

on vérifie que l'endomorphisme gradué de degré 1 de $e_t' B \oplus e_1'(e_t A \oplus e_1 B)$ donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & id_B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} -\partial_B & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_A & 0 \\ id_B & f & \partial_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & id_B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\partial_B & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_A & 0 \\ id_B & f & \partial_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_B & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_B \end{pmatrix}$$

2. $Cof(f) = e_t A \oplus e_1 B$, $Cof(c(f)) = e_t' B \oplus e_1'(e_t A \oplus e_1 B)$ et $SA = e_t A$, en termes matriciels $r_f c^2(f)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & id_A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_A & 0 \\ 0 & id_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_A & 0 \end{pmatrix} = \partial_f$$

□

On déduit aussi du lemme 4.8 l'existence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "\partial_{c(f)}"] \arrow[d, equal] & SB \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[r] \arrow[u, "r_{c(f)}"'] & \cdots \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c(f)"] & Cof(f) \arrow[r, "\partial_f"] & SA. & &
\end{tikzcd}$$

Lemme 4.9. *1. Le composé $\partial_{c(f)} s_f : SA \longrightarrow SB$ égale $-Sf$.*

2. Le carré

$$\begin{tikzcd}
Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[d, "r_{c(f)}"] \\
SA \arrow[r, "-Sf"'] & SB
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

Preuve. 1. $s_f : SA \to Cof(c(f))$ et $\partial_{c(f)} : Cof(c(f)) \longrightarrow SB$, dans les bases canoniques

$$\partial_{c(f)} s_f = \begin{pmatrix} id_B & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f \\ id_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f \end{pmatrix}$$

2. $r_{c(f)} c^3(f) = \partial_{c(f)}$ et $-Sfr_f = \partial_{c(f)} s_f r_f$ l'homotopie cherchée est issue de celle entre $id_{Cof(c(f))}$ et $s_f r_f$. □

Remarque 4.10. Le carré

$$\begin{tikzcd}
Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[d, "r_{c(f)}"] \\
SA \arrow[r, "Sf"'] & SB
\end{tikzcd}$$

ne commute pas en général, même à homotopie près. C'est dans cette remarque que se trouve la nécessité de faire apparaître des signes.

En appliquant le lemme 4.9 de manière itérée on déduit le résultat voulu.

Proposition 4.11. *Il existe un diagramme dans $C(\mathcal{A})$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[r, "c^4(f)"] \arrow[d, "r_{c(f)}"] & Cof(c^3(f)) \arrow[r, "c^5(f)"] \arrow[d, "r_{c^2(f)}"] & Cof(c^4(f)) \arrow[r, "c^6(f)"] \arrow[d, "r_f r_{c^3(f)}"] & \cdots \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c(f)"] & Cof(f) \arrow[r, "\partial_f"] & SA \arrow[r, "-Sf"] & SB \arrow[r, "-Sc(f)"] & SCof(f) \arrow[r, "-S\partial_f"] & S^2A \arrow[r, "S^2 f"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les carrés commutent à homotopie près et où tous les morphismes verticaux sont des équivalences d'homotopie.

Remarque 4.12. Le morphisme $Cof(c^4(f)) \longrightarrow S^2A$ est le composé $r_f r_{c^3(f)} : Cof(c^4(f)) \longrightarrow SCof(c(f)) \longrightarrow S^2A$. Au rang d'après le morphisme est $r_{c(f)}r_{c^3(f)}$, puis $r_{c^2(f)}r_{c^3(f)}$, puis $r_f r_{c^3(f)}r_{c^3(f)}$ etc.

Corollaire 4.13. *Soit $A \to B$ un morphisme dans $C(\mathcal{A})$ et C un complexe, on a une suite*

$$[A,C] \xleftarrow{f^*} [B,C] \xleftarrow{c(f)^*} [Cof(f),C] \xleftarrow{\partial_f^*} [SA,C] \xleftarrow{-Sf^*} [SB,C] \xleftarrow{-Sc(f)} [SCof(f),C] \longleftarrow \dots$$

exacte partout sauf en $[A,C]$.

Preuve. On utilise le lemme 4.6. □

Remarque 4.14. Le diagramme

$$\Delta_f = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA.$$

est appelé le *triangle distingué de f*. La suite exacte du lemme précédent est évidemment fonctorielle en $f \in C(\mathcal{A})$, mais *pas en l'image de f dans $K(\mathcal{A})$* car Cof n'est pas un foncteur sur la catégorie des flèches de $K(\mathcal{A})$. En revanche, grâce à son écriture sous la forme de Puppe, elle est fonctorielle en l'image dans $K(\mathcal{A})$ de Δ_f. C'est cette seconde propriété de fonctorialité qui justifie l'extraction de la notion de triangle et qui est le cœur de la notion de catégorie triangulée.

5 Structure triangulée de $K(\mathcal{A})$

5.1 Triangles dans $K(\mathcal{A})$

On se place dans la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes à homotopie près.

Définition 5.1 (Triangles et rotations)**.**

1. Un *triangle* dans $K(\mathcal{A})$ est un diagramme

$$\Delta = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA.$$

2. Un *morphisme de triangles* $\Delta \longrightarrow \Delta'$ est un diagramme commutatif dans $K(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[d, "{(u,v,w)}"'] & = & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & SA \arrow[d, "Su"] \\ \Delta' & = & A' \arrow[r, "f'"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & SA'. \end{tikzcd}$$

Un tel morphisme est noté $(u,v,w) : \Delta \longrightarrow \Delta'$.

3. La *rotation à gauche* d'un triangle Δ est le triangle

$$\Delta[1] = B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA \xrightarrow{-Sf} SB.$$

4. La *rotation à droite* d'un triangle Δ est le triangle

$$\Delta[-1] = S^{-1}C \xrightarrow{-S^{-1}h} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Exemple Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $C(\mathcal{A})$,

$$\Delta_f = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA$$

est un triangle.

Définition 5.2. Un triangle est dit *distingué* s'il est isomorphe dans $K(\mathcal{A})$ à un triangle du type

$$\Delta_f = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA.$$

Lemme 5.3 (Exemples de triangles distingués)**.** *Si $f : A \to B$ est un morphisme, les triangles*

$$B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{c^2(f)} Cof(c(f)) \xrightarrow{\partial_f} SB$$
$$B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA \xrightarrow{-Sf} SB$$

sont distingués.

Preuve. Le premier triangle est $\Delta_{c(f)}$ et le second lui est isomorphe puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "\partial_{c(f)}"] \arrow[d, "r_f"] & SB \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, "c(f)"] & Cof(f) \arrow[r, "\partial_f"] & SA \arrow[r, "-Sf"] & SB
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie près dans $C(\mathcal{A})$ par les lemmes 4.8 et 4.9. □

Remarque 5.4. Le triangle $B \xrightarrow{c(f)} Cof(f) \xrightarrow{\partial_f} SA \xrightarrow{Sf} SB$ n'est pas distingué en général.

Pour $n \in Z$, on note $k[n]$ le complexe engendré par $\epsilon[n]$ en degré n. On a $k[n] = k[1]^{\otimes n}$. On note S^n l'opérateur $k[n] \otimes -$.

Lemme 5.5 (suspension de triangles distingués)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les triangles*

$$S^n\Delta_f = S^nA \xrightarrow{S^nf} S^nB \xrightarrow{S^nc(f)} S^nCof(f) \xrightarrow{(-1)^nS^n\partial_f} S^{n+1}A.$$

sont distingués.

Preuve. Il suffit essentiellement de vérifier que $S^nCof(f)$ est isomorphe à $Cof(S^nf)$ dans $C(\mathcal{A})$

$Cof(f) = e_tA \oplus e_1B$ avec différentielle

$$\partial_{Cof(f)} = \begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ f & \partial_B \end{pmatrix}$$

$S^nCof(f) = \epsilon[n]e_tA \oplus \epsilon[n]e_1B$ avec différentielle

$$(-1)^n\partial_{Cof(f)} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}\partial_A & 0 \\ (-1)^nf & (-1)^n\partial_B \end{pmatrix}$$

$Cof(S^n f) = e_t\epsilon[n]A \oplus e_1\epsilon[n]B$ avec différentielle

$$\begin{pmatrix} -\partial_{S^nA} & 0 \\ f & (-1)^n\partial_{S^nB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}\partial_A & 0 \\ f & (-1)^n\partial_B \end{pmatrix}$$

L'isomorphisme entre $S^nCof(f)$ et $Cof(S^nf)$ est donné par la commutation de $\epsilon[n]$ avec e_t et e_1 : $\epsilon[n]e_t = (-1)^n e_t\epsilon[n]$ et $\epsilon[n]e_1 = e_1\epsilon[n]$. En utilisant cet isomorphisme on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} S^nB \arrow[r, "S^nc(f)"] \arrow[dr, "c(S^nf)"'] & S^nCof(f) \arrow[r, "(-1)^nS^n\partial_f"] \arrow[d, "\simeq"] & S^{n+1}A \\ & Cof(S^nf) \arrow[ur, "\partial_{S^nf}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Proposition 5.6 (Propriétés des triangles distingués)**.** *1. (TR1a) Le triangle*

$$\Delta_A = A \xrightarrow{=} A \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} SA.$$

est distingué.

2. (TR1b) Tout morphisme $f : A \to B$ dans $K(\mathcal{A})$ se complète en un triangle distingué

$$\Delta_f = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA.$$

3. (TR2) La rotation à droite ou à gauche d'un triangle distingué est un triangle distingué.

4. (TR3) Pour tous triangles $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{fg} C \xrightarrow{h} SA$ et $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{fg} C \xrightarrow{h} SA$, tout carré commutatif dans $K(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B \end{tikzcd}$$

se complète en un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} \Delta_f \arrow[d, "{(u,v,w)}"'] & = & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & SA \arrow[d, "Su"] \\ \Delta_{f'} & = & A' \arrow[r, "f'"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & SA'. \end{tikzcd}$$

5. (TR4) Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ deux morphismes dans $K(\mathcal{A})$, pour tous triangles $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D \xrightarrow{f''} SA$, $A \xrightarrow{gf} C \xrightarrow{(gf)'} E \xrightarrow{(gf)''} SA$ et $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F \xrightarrow{g''} SA$, il existe h et h' rendant le diagramme suivant commutatif *dans $K(\mathcal{A})$*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[r, "f''"] \arrow[d, dashed, "h"] & SA \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "(gf)'"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "(gf)''"] \arrow[d, dashed, "h'"] & SA \arrow[d, "Sf"] \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "g'"] & F \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "Sf'g''"'] & SB \arrow[dl, "Sf'"] \\
 & & SD &
\end{tikzcd}
$$

et tels que la troisième colonne soit un triangle distingué.

6. *Le composé de deux morphismes successifs dans un triangle distingué est nul.*

7. *Si $D \in K(\mathcal{A})$, tout triangle distingué $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA$ produit des suites exactes longues*

$$\dots [S^{-1}B, D] \xleftarrow{-S^{-1}g^*} [S^{-1}C, D] \xleftarrow{-S^{-1}h^*} [A, D] \xleftarrow{f^*} [B, D] \xleftarrow{g^*} [C, D] \xleftarrow{h} [SA, D] \xleftarrow{-Sf^*} [SB, D] \xleftarrow{-Sg^*} [SC, D] \dots$$

et

$$\dots [D, S^{-1}B] \xrightarrow{-S^{-1}g} [D, S^{-1}C] \xrightarrow{-S^{-1}h} [D, A] \xrightarrow{f} [D, B] \xrightarrow{g} [D, C] \xrightarrow{h} [D, SA] \xrightarrow{-Sf} [D, SB] \xrightarrow{-Sg} [D, SC] \dots$$

Preuve. 1. Le triangle $\Delta_f = A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} Cone(A) \xrightarrow{h} SA$ est distingué et $Cone(S) \to 0$ est une équivalence d'homotopie (lemme 3.14).

2. Il suffit de prendre $C = Cof(f)$, $g = c(f)$ et $h = \partial_f$.

3. Pour la rotation gauche c'est le lemme 5.3. Pour la rotation droite on utilise le lemme 5.5 avec $n = -1$ puis deux fois le lemme 5.3.

4. On relève le carré commutatif de $K(\mathcal{A})$ dans un carré homotopique de $C(\mathcal{A})$, puis les triangles sont construit en prenant les cofibres homotopiques et w est construit comme dans la preuve du lemme 4.2.2. La commutation carré de droite se vérifie à la main pour ce choix de w.

5. Il suffit prendre $D = Cof(f)$, $E = Cof(gf)$ et $F = Cof(g)$ et de montrer l'existence de h, h' et le fait que $D \xrightarrow{h} E \xrightarrow{h'} F \xrightarrow{Sf'g''} SD$ est un triangle distingué. En écrivant $Cof(f) = e_tA \oplus e_1B$ et $Cof(gf) = e_tA \oplus e_1C$ et $Cof(g) = e_tB \oplus e_1C$, h est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

et h' par la matrice

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Cof(h) = e'_t(e_tA \oplus e_1B) \oplus e'_1(e_tA \oplus e_1C)$ muni de la différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial_A & 0 & 0 & 0 \\ -f & -\partial_B & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial_A & 0 \\ 0 & g & gf & \partial_C \end{pmatrix}.$$

On a deux morphismes de complexes $u : Cof(h) \to Cof(g)$ et $v : Cof(g) \to Cof(h)$ donnés par

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $uv = id_{Cof(g)}$ et vu homotope à $id_{Cof(h)}$, l'homotopie étant donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver l'assertion, il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Cof(f) \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & Cof(gf) \arrow[r, "c(h)"] \arrow[d, equal] & Cof(h) \arrow[r, "\partial_h"] & SCof(f) \arrow[d, equal] \\ Cof(f) \arrow[r, "h"] & Cof(gf) \arrow[r, "h'"] & Cof(g) \arrow[r, "Sf'g''"] \arrow[u, "v"] & SCof(f) \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près, or

$$u\,c(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h'$$

et

$$\partial_h v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Sf'g''.$$

6. Par rotation, il suffit de vérifier que le composé $A \to B \to Cof(f)$ est nul à homotopie près, mais c'est exactement la propriété universelle de $Cof(f)$.

7. Par rotation, il suffit de montrer que pour tout triangle distingué $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA$ et tout objet D, les suites $[A, D] \xleftarrow{f} [B, D] \xleftarrow{g} [C, D]$ et $[D, A] \xrightarrow{f} [D, B] \xrightarrow{g} [D, C]$ sont exacte en $[B, D]$ et $[D, B]$ respectivement.

   Pour le premier type de suite c'est la propriété universelle des cofibres homotopiques.

   Pour le second, par 6. le composé $[D, A] \xrightarrow{f} [D, B] \xrightarrow{g} [D, C]$ est nul, on déduit l'exactitude de 4. : soit $u : D \to B$ tel que gu soit nul dans $K(\mathcal{A})$, cela fournit un diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & SD \arrow[r, "-1"] \arrow[d, dashed, "Sv"] & SD \arrow[d, "Su"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & SA \arrow[r, "-Sf"] & SB \end{tikzcd}$$

   qui se complète en un morphisme de triangle via un certain $v : D \to A$, la commutation du dernier carré assure que $u = fv$.

□

5.2 Catégories triangulées

Définition 5.7 (Verdier [Ve]). Une k-catégorie triangulée est une catégorie T enrichie sur les k-modules munie d'une autoéquivalence $S : T \to T$ (appelée la *suspension*) et d'une classe distinguée de triangles vérifiant les propriétés TR1, TR2, TR3, et TR4.

Exemple 5.8. La proposition 5.6 assure que $K(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.

Définition 5.9. Un foncteur homologique est un foncteur $H : T \to \mathcal{A}$ où T est une catégorie triangulée et où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne tel que la suite

$$\dots \longrightarrow H(S^{-1}C) \xrightarrow{H(-S^{-1}f)} H(A) \xrightarrow{H(f)} H(B) \xrightarrow{H(g)} H(C) \xrightarrow{H(h)} H(SA) \longrightarrow \dots$$

associé à un triangle distingué $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA$ soit exacte.

Proposition 5.10. *Soit T une catégorie triangulée,*

1. *le composé de deux morphismes d'un triangle distingué de T est nul ;*

2. *pour tout D, les foncteurs $Hom_T(D, -)$ et $Hom_T(-, D)$ sont homologiques ;*

3. *pour tout morphisme de triangle*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & SA \arrow[d, "Su"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & SA'. \end{tikzcd}$$

   si u et v sont des isomorphismes, il en est de même pour w.

Preuve. 1. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} SA$ un triangle distingué, par TR2 il suffit de prouver que $gf = 0$. On utilise TR1 et TR3 pour construire un morphisme de triangle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & SA \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & SA \end{tikzcd}$$

et on en déduit que $gf = 0$.

2. Par le résultat précédent tous les composés de flèches dans la suite sont nuls, il reste donc à montrer que l'image d'une flèche est surjective sur noyau de la suivante. Exactitude de la première suite en $[D, B]$: soit $u : D \to B$ tel que $gu = 0$, on cherche $v : D \to A$ tel que $u = fv$; on utilise TR3 :

$$\begin{tikzcd} S^{-1}D \arrow[r] \arrow[d, "S^{-1}u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "v"] & D \arrow[d, "u"] \\ S^{-1}B \arrow[r, "-S^{-1}g"'] & S^{-1}C \arrow[r, "-S^{-1}h"'] & A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Par TR2, on déduit l'exactitude de la suite partout. Le raisonnement est analogue pour la deuxième suite.

3. Par le lemme de Yoneda il suffit de montrer que, pour tout $D \in T$, $Hom_T(D, w)$ est un isomorphisme. On déduit alors le résultat du point précédent et du lemme des cinq appliqué à l'image par $Hom_T(D, -)$ de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & SA \arrow[r, "-Sg"] \arrow[d, "Su"] & SB \arrow[d, "Sv"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & SA' \arrow[r, "-Sg'"] & SB'. \end{tikzcd}$$

□

A La dérivation comme un procédé général

Le mot *dérivation*, pour une catégorie, prend son origine dans la construction des foncteurs dérivés (puis des catégories dérivées), mais il est possible d'extraire une philosophie de la dérivation qui trouve des exemples dans d'autres contextes, notamment non-abéliens. Sans rentrer dans les détails, disons qu'il s'agit de remplacer une catégorie C d'objets par une catégorie plus grosse D (souvent une catégorie supérieure) où les opérations de limites et de colimites se comportent mieux que dans C [KCF, introduction]. Par exemple, si C est la catégorie des groupes abéliens, D sera la catégorie (supérieure) des complexes de groupes abéliens à quasi-isomorphisme près. En pratique, la catégorie D se construit en utilisant une catégorie M intermédiaire entre C et D. M est souvent dite la catégorie des *modèles*[9] pour D, elle a l'avantage que ses objets sont définit de manière plus "algébrique" que ceux de D (dans l'exemple précédent il s'agit de la catégorie des complexes).

Exemples de dérivations Les dérivations sont en fait beaucoup plus banales qu'on ne pense :

Objets classiques (C)	**Dérivation** (D)	**Modèles** (M)
ensembles	types d'homotopie	ensembles simpliciaux, espaces topologiques
ensembles	1-types d'homotopie	groupoïdes
groupes abéliens	types d'homologie	complexes de chaînes, spectres
anneaux	anneaux homotopiques	anneaux simpliciaux, dg-anneaux
variétés algébriques	schémas	foncteurs sur les anneaux
variétés différentielles	C^∞-schémas	préfaisceaux sur les variétés, foncteurs sur les anneaux C^∞
schémas	schémas dérivés	foncteurs simpliciaux sur les anneaux simpliciaux
catégories abéliennes	catégories dérivées	complexes de chaînes
espaces topologiques	champs	préfaisceaux simpliciaux
catégorie	faisceaux	préfaisceaux

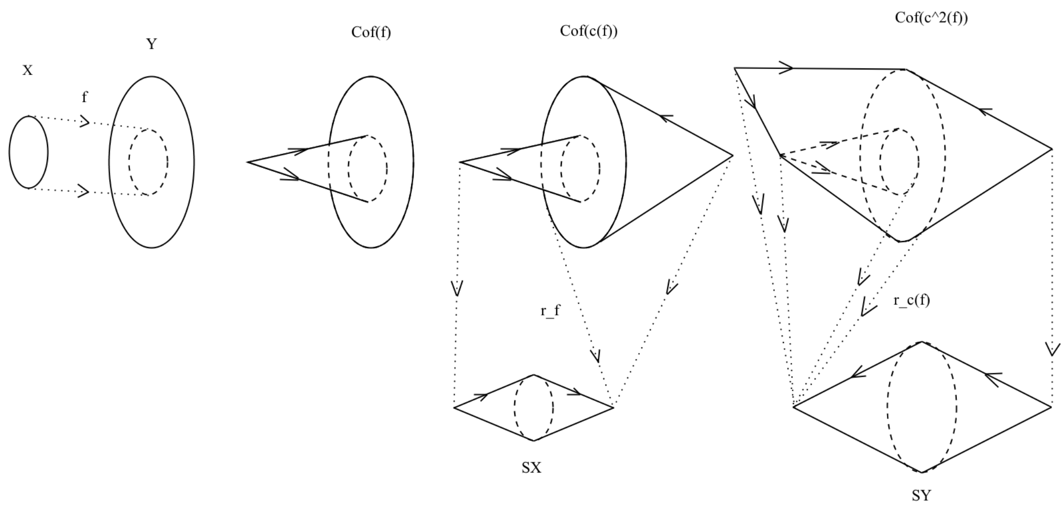
[9] En pratique, M est souvent une *catégorie de modèles* au sens de Quillen, mais pas forcément.

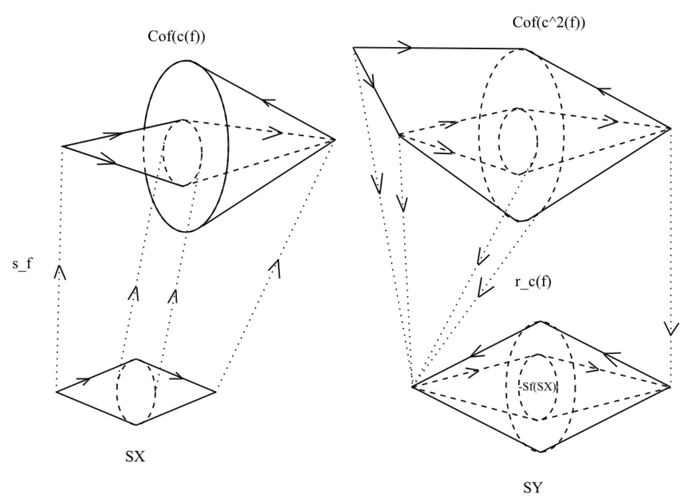
B Le morphisme $-Sf$ en topologie

En topologie, toute application continue $f : X \to Y$ définit un diagramme analogue à

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "c(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(f) \arrow[r, "c^2(f)"] \arrow[d, equal] & Cof(c(f)) \arrow[r, "c^3(f)"] \arrow[d, "r_f"] & Cof(c^2(f)) \arrow[r, "c^4(f)"] \arrow[d, "r_{c(f)}"] & Cof(c^3(f)) \arrow[r, "c^5(f)"] \arrow[d, "r_{c^2(f)}"] & Cof(c^4(f)) \arrow[r] \arrow[d, "r_f r_{c^3(f)}"] & \cdots \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c(f)"] & Cof(f) \arrow[r, "\partial_f"] & SA \arrow[r, "-Sf"] & SB \arrow[r, "-Sc(f)"] & SCof(f) \arrow[r, "-S\partial_f"] & S^2A \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui commute toujours à homotopie prés. Avec les complexes il était possible de construire un inverse homotopique de r_f qui soit une section de r_f, ce n'est plus le cas en topologie mais des inverses homotopiques de r_f existent tout de même. Si s_f est un tel inverse, il est facile de mettre en évidence que le morphisme $\partial_{c(f)} s_f$ est homotope à $-Sf$. Dans le dessin suivant, cela s'illustre essentiellement par le sens inverse des flèches entre $Sf(SX)$ et SY.





Références

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[Ill] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité: travaux de J.-L. Verdier.* Enseign. Math. (2) 36 (1990), no. 3-4, 369–391.
http://retro.seals.ch/cntmng?type=pdf&rid=ensmat-001:1990:36::130&subp=hires

[GZ] P. Gabriel; M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967.

[Gr] A. Grothendieck, *Sur quelques points d?algèbre homologique*, Tohoku Math. J. 9 (1957)

[He] A. Heller, *Homological Algebra in Abelian Categories*, Annals of Math. 68 (1958)

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Ke1] B. Keller, *Derived categories and their uses.* Chapter of the Handbook of algebra, Vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier 1996.
http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/dcu.pdf

[Ke2] B. Keller, *Introduction to abelian and derived categories.* in Representations of Reductive Groups, edited by R. W. Carter and M. Geck, Cambridge University Press 1998, 41-62.
http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/cam.pdf

[Ke] G. M. Kelly. Elementary observations on 2-categorical limits. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 39(2), 1989.

[Ne] A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, 148. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[No] B. Noohi, *Lectures on derived and triangulated categories.*
http://arxiv.org/abs/0704.1009

[St] R. Street. Limits indexed by category-valued 2-functors. Journal of Pure and Applied Algebra, 1976.

[Ve0] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées (État 0).* SGA 4 1/2.

[Ve] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* Astérisque No. 239 (1996).

[We] C. Weibel, *History of homological algebra*, preprint.
http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/survey.pdf

[KCF] I. Ciocan-Fontanine, M. Kapranov, *Derived Quot schemes*, http://arxiv.org/pdf/math/9905174